ESCALAS MÚLTIPLAS E O MÉTODO COMPLEXO DE INTERPOLAÇÃO PARA QUATRO ESPAÇOS DE BANACH

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Ivam Resina e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 30 de agosto de 1985.

Prof. Dr. DICESAR LASS FERNANDEZ
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, com requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática

Agosto – 1985

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

A teoria dos espaços de interpolação é hoje um ramo da análise funcional. A teoria teve suas origens na análise de Fourier clássica quando procurava-se meios elementares de obter estimadas em L^p, $p_0 \leq p \leq p_1$, uma vez obtida as estimadas em L^{p_0} e L^{p_1}. Tipicamente, se $(X_\theta;\ 0 \leq \theta \leq 1)$ e $(Y_\theta;\ 0 \leq \theta \leq 1)$ são famílias de espaços de Banach e T é um operador linear limitado entre os espaços X_θ e Y_θ quando $\theta = 0$ e $\theta = 1$ queremos então concluir que T é também limitado de X_θ em Y_θ para todo o cojunto $0 < \theta < 1$. Ainda mais, gostariamos de ter a estimada:

$$\| T \|_{X_\theta \to Y_\theta} \leq C(\| T \|_{X_0 \to Y_0})^{1-\theta} (\| T \|_{X_1 \to Y_1})^{\theta}.$$

O problema é então procurar métodos de construção de espaços X_θ a partir de pares de espaços dados (X_0, X_1) que satisfaçam a propriedade de interpolação acima. Neste contexto, trabalha-se então, com dois espaços X_0 e X_1 e um parâmetro θ.

A idéia de se desenvolver teorias de interpolação para vários espaços de Banach começou, independentemente em vários paises, em 1958. Uma variedade de métodos para encontrar teoremas de interpolação foram criados: o método dos traços (Lions - [21]), o método dos espaços intermediários (Gagliardo - [16]), o método das médias (Lions-Peetre - [24]), o K e o J-método (Peetre - [26]), o método complexo (Calderón - [4]), o método das escalas (Krein- [18]).

O estudo completo e sistemático da teoria complexa de interpolação para dois espaços e um parâmetro foi feito por Calderón em [5]. Por outro lado, extensões desse método foram feitas por A. Favini [9], A. Yoshikawa [33], G. Sparr [31], D. L. Fernandez [12], J. I. Bertolo [2] e G. Dore, D. Guidetti, A. Venni [6].

As extensões feitas por Favini, Yoshikawa e Sparr consideram $(n + 1)$ espaços e n parâmetros e as extensões dadas por Fernandez, Bertolo e Dore-Guidetti-Venni tratam com 2^n espaços e n parâmetros. Esta passagem é útil nas aplicações como por exemplo na teoria da aproximação multiparamétrica.

O objetivo deste trabalho é generalizar o método das escalas entre dois espaços de Banach e um parâmetro para escalas biparamétricas entre quatro espaços de Banach e estabelecer algumas relações entre o método das escalas e o método complexo de interpolação.

Para termos uma idéia geral do trabalho passamos a descrever de forma suscinta o conteúdo dos capítulos.

No Capítulo 0 damos algumas definições básicas e teoremas que serão sistematicamente usados nos outros capítulos. Os conceitos e teoremas enunciados podem ser vistos em [20]. O único fato novo neste capítulo (pelo menos não temos referência) é o critério de analiticidade para funções definidas na polifaixa S_2 (Teorema 0.5.8).

No Capítulo 1 estudamos a teoria das escalas múltiplas de espaços de Banach e estabelecemos teoremas gerais de interpolação (Teoremas 1.7.10 e 1.8.1).

No Capítulo 2 estudamos o método complexo de interpolação para gerar espaços intermediários entre quatro espaços de Banach. Neste sentido os três primeiros paragrafos são devidos essencialmente a D. L. Fernandez [12] e J. I. Bertolo [2]. Em seguida obtemos um teorema de interpolação (Teorema 2.8.1) utilizando a noção de completamento relativo. Esta noção, embora simples, será fundamental no estudo da dualidade dos espaços intermediários (Teorema 2.9.4) pois evita a apresentação de um segundo método complexo de interpolação para o estudo da dualidade como visto em [2]. No § 11, relacionamos os espaços intermediários obtidos pelo método complexo com a teoria das escalas múltiplas do Capítulo 1 e como aplicação obtemos os espaços de Bessel-Nikol'skii como uma escala múltipla obtida da interpolação complexa entre quatro espaços de Sobolev-Nikol'skii. No § 12 definimos a escala analítica de espaços e obtemos um teorema de interpolação do tipo Riesz-Thorin para estas escalas.

Quero deixar aqui meus agradecimentos ao Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandez pela dedicação e orientação neste trabalho.

Agradeço também ao Prof. Dr. João Ivo Bertolo pela paciência em ouvir-me nas minhas exposições.

Finalmente à Bell e meus filhos Ivam e André pelas possiveis e certas omissões.

CAPÍTULO 0

IMERSÃO DE ESPAÇOS DE BANACH, FUNÇÕES BIHARMÔNICAS E UM CRITÉRIO DE ANALITICIDADE

INTRODUÇÃO. Neste capítulo daremos algumas definições básicas e teoremas que serão sistematicamente usados nos outros capítulos, razão pela qual resolvemos enunciá-los aqui. Os conceitos e teoremas, bem como suas demonstrações, dos quatro primeiro parágrafos, podem ser visto em [20]. O único fato novo neste capítulo (pelo menos não temos referência) é o critério de analiticidade para funções definidas na polifaixa S_2 (Teorema 0.5.8).

0.1. IMERSÃO DE ESPAÇOS DE BANACH

0.1.1. DEFINIÇÃO. Diremos que um espaço de Banach E_1 está *imerso* em um espaço de Banach E_o se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $x \in E_1$ implica que $x \in E_o$.

(ii) O espaço E_o induz uma estrutura de espaço vetorial sobre E_1 coincidindo com a estrutura de E_1.

(iii) Existe uma constante c tal que

$$\|x\|_{E_o} \leq c \|x\|_{E_1} \quad \text{para todo} \quad x \in E_1. \tag{1}$$

O menor valor possível da constante c em (1) é chamada constante de imersão de E_1 em E_o. Dizemos também que E_1 está algébrica e topologicamente imerso em E_o.

Algumas vezes o termo imersão é usado num sentido mais amplo. Ao invés das condições (i) e (ii) exigimos a existência de uma transformação linear injetora j (o operador de imersão) levando E_1 em E_o e então a condição (i) é escrita na forma $\|j(x)\|_{E_o} \leq C\|x\|_{E_1}$. Em tal situação sempre identificamos E_1 com sua imagem $j(E_1)$.

0.1.2. DEFINIÇÃO. O espaço E_1 está *densamente imerso* em E_o se as condições (i)-(iii) valem e também: (iv) E_1 é denso em E_o.

No que segue nós denotaremos a imersão de E_1 em E_o pelo símbolo $E_1 \subset E_o$.

0.1.3. DEFINIÇÃO. Diremos que o espaço E_1 está *normalmente imerso* em E_o se E_1 é denso em E_o e a constante de imersão não excede 1, isto é, $\|x\|_{E_o} \leq \|x\|_{E_1}$.

0.2. COMPLETAMENTO RELATIVO

Sejam E_o e E_1 espaços de Banach tais que $E_1 \subset E_o$. Denotaremos por E^{01} o conjunto dos elementos de E_o que são limite, em E_o, de sequências de elementos de E_1 limitadas na norma de E_1, ou seja:

$$(1) \quad E^{01} = \{x \in E_o : x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ (em } E_o), \ x_n \in E_1 \text{ e } \|x_n\|_{E_1} \leq R\}$$

Obviamente E^{01} é um subespaço vetorial de E_o. Definimos uma norma neste espaço por

$$\|x\|^{01} = \inf R$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os R para os quais existem sequências $\{x_n\}$ com a propriedade (1).

Temos então $E_1 \subset E^{01} \subset E_o$ e

$$\|x\|^{01} \leq \|x\|_{E_1} \quad (x \in E_1); \quad \|x\|_{E_o} \leq C\|x\|^{01} \qquad (x \in E^{01})$$

onde C é o constante de imersão de E_1 em E_o. Assim, se E_1 está normalmente imerso em E_o então E^{01} também estará. O espaço E^{01} é chamado completamento de E_1 relativo a E_o.

Veremos agora o significado geométrico de E^{01}. Seja $x \in E^{01}$ e $\|x\|^{01} = r$. Por definição o elemento x pertence ao fecho em E_o de qualquer bola de E_1 com raio $R > r$. Tomando uma sequência $R_m \to r$ e para todo R_m escolhendo uma sequência apropriada de elementos de E_1 com a propriedade (1), nós podemos construir uma sequência $\{x'_m\} \subset E_1$ tal que $x'_m \to x$ em E_o e $\|x'_m\|_{E_1} \to r$ quando $m \to \infty$. Então $\overline{x}_m = r x'_m (\|x'_m\|_{E_1})^{-1}$ converge para x em E_o e $\|\overline{x}_m\|_{E_1} = r$. Então x pertence ao fecho em E_o da bola (e até mesmo da esfera) de raio r de E_1.

0.2.1. TEOREMA. O espaço normado E^{01} é um espaço de Banach.

A seguir enunciaremos alguns resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em [20].

0.2.2. LEMA. Se E_1 não coincide com E_o então E^{01} também não coincide com E_o.

0.2.3. LEMA. O completamento $\overline{E^{01}}$ de E^{01} relativo a E_o coincide com E^{01}.

0.2.4. LEMA. Uma condição necessária e suficiente para que E_1 seja isometricamente imerso em E^{01} é que a bola de E_1 seja fechada (em E_1) na topologia induzida pela norma de E_o.

0.2.5. DEFINIÇÃO. O espaço E_1 é dito *completo* em relação a E_o

se E^{01} coincide com E_1 (isometricamente).

0.2.6. LEMA. Se $E_2 \subset E_1 \subset E_0$ então o completamento E^{12}, de E_2 em relação a E_1, está imerso em E^{02} com constante de imersão não excedendo 1. O completamento de E^{12} com relação a E_o coincide com E^{02} (isometricamente).

0.2.7. COROLÁRIO. Se E^{12} é completo com relação a E_o, então E^{12} coincide com E^{02}.

0.3. ESPAÇOS DUAIS DE ESPAÇOS DE BANACH IMERSOS

Se o espaço E_1 está imerso no espaço E_o então a restrição a E_1 de todo funcional linear contínuo $f(x)$ definido em E_o induz um funcional sobre E_1 de modo natural. Este funcional é contínuo na norma de E_1. Com efeito,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{E_o'} \|x\|_{E_o} \leq \mathbb{C} \|f\|_{E_o'} \|x\|_{E_1} .$$

Então, uma transformação linear de E_o' em E_1' é obtida. Se E_1 não é denso em E_o então existe um funcional não nulo em E_o' que se anula identicamente em E_1. Neste caso a transformação não é injetiva. Por outro lado, se E_1 é denso em E_o então a transformação é injetiva e E_o' está imerso em E_1' e a constante de imersão não excede $\mathbb{C}$.

A quantidade

$$\sup_{x \in E_1} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{E_1}} = \|f\|_{E_1'} \qquad (f \in E_o')$$

será uma seminorma sobre E_o' se E_1 não é denso em E_o e uma norma sobre E_1' se E_1 é denso em E_o.

A seguir enunciaremos alguns resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em [20].

0.3.1. LEMA. O completamento E^{01} de E_1 relativo a E_o consiste dos elementos de E_o induzindo funcionais sobre E_o', limitados na seminorma $\|f\|_{E_1'}$, de acordo com a fórmula $x(f) = f(x)$.

0.3.2. COROLÁRIO. A norma do funcional $x(f)$ com respeito a seminorma $\|f\|_{E_1'}$ é igual a $\|x\|^{01}$, isto é,

$$(1) \qquad \|x\|^{01} = \sup_{f \in E_o',\ \|f\|_{E_1'} \leq 1} |f(x)|.$$

0.3.4. DEFINIÇÃO. Seja E um espaço de Banach. Um subespaço vetorial $M' \subset E'$ é dito *normativo* se

$$\|x\|_E = \sup_{f \in M',\ \|f\|_{E'} \leq 1} |f(x)| \qquad (x \in E).$$

A igualdade 0.3.2.(1) e o lema 0.2.4, implica o seguinte teorema

0.3.5. TEOREMA. Sejam E_1 e E_o espaços de Banach com $E_1 \subset E_o$. A condição necessária e suficiente para que $E_o' \subset E_1'$ seja normativa é que E_1 seja isometricamente imerso em E^{01}, ou, equivalentemente, a bola de E_1 seja fechada, em E_1, na topologia induzida pela norma de E_o.

No caso em que E_1 está densamente imerso em E_o temos os seguintes teoremas.

0.3.6. TEOREMA. Se E_1 é densamente imerso em E_o então E_o' é completo com respeito a E_1'.

0.3.7. TEOREMA. Se $E_1 \subset E_0$ e E_1 é reflexivo então E_1 é completo em relação a E_o.

0.3.8. TEOREMA. Se E_1 é densamente imerso em E_o e E_o' é densamente imerso em E_1' então E_1 está isometricamente imerso em E^{01}. O espaço E^{01} pode ser isometricamente imerso em E_1'' de modo natural e, nesta identificação natural nós podemos assumir que $E^{01} = E_0 \cap E_1''$.

0.4. ESPAÇOS DE BANACH INTERMEDIÁRIOS

0.4.1. Denotaremos por $\square$ o conjunto dos pares $k = (k_1,k_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que $k_j = 0$ ou 1 $(j = 1,2)$, ou seja

$$\square = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}.$$

0.4.2. Consideremos a família $\mathbb{E} = (E_k\ , k \in \square)$ de quatro espaços de Banach imersos (continuamente) num mesmo espaço vetorial topologico Hausdorff V. Famílias deste tipo são chamadas famílias admissíveis de espaços de Banach em relação a V.

Se $\mathbb{E} = (E_k\ , k \in \square)$ é uma família admissível de espaços de Banach em relação a V, consideremos sua envoltória linear $\Sigma\mathbb{E}$ e sua intersecção $\cap\mathbb{E}$, definidas por,

$$\Sigma\,\mathbb{E} = \{x \in V \mid x = \sum_{k\in\square} x_k\ ,\ x_k \in E_k\}$$

e

$$\cap\mathbb{E} = \{x \in V \mid x \in E_k \quad \forall k \in \square\}.$$

Estes espaços são espaços de Banach quando considerados, respectivamente, com as normas

$$(1) \quad \|x\|_{\Sigma\mathbb{E}} = \inf \{ \sum_{k\in\Box} \|x_k\|_{E_k} \mid x = \sum_{k\in\Box} x_k , \quad x_k \in E_k \}$$

$$(2) \quad \|x\|_{\cap\mathbb{E}} = \max \{ \|x\|_{E_k} , \quad k \in \Box \}$$

Notamos que $\cap\mathbb{E} \subset E_k \subset \Sigma\mathbb{E}$ com constante de imersão menor ou igual a um.

No caso em que os espaços da família $\mathbb{E}$ são tais que se $k \geq k'$ (ordem parcial) então $E_k \subset E_{k'}$, nós temos que $\cap\mathbb{E}$ coincide com E_{11} como conjunto e o espaço $\Sigma\mathbb{E}$ com E_{00}. Ainda mais, estes espaços são isomorfos, pois se $x \in E_{11}$ então

$$\|x\|_{E_{11}} \leq \|x\|_{\cap\mathbb{E}} = \max (\|x\|_{E_{11}}, \|x\|_{E_{10}}, \|x\|_{E_{01}}, \|x\|_{E_{00}})$$

$$\leq \max(1, C_{10}, C_{01}, C_{00}) \|x\|_{E_{11}}$$

onde C_k é a constante de imersão de E_{11} em E_k. Agora, para $x \in E_{00}$ teremos

$$\|x\|_{E_{00}} \geq \|x\|_{\Sigma\mathbb{E}} = \inf (\sum_{k\in\Box} \|x_k\|_{E_k} , \quad x = \sum_{k\in\Box} x_k) \geq$$

$$\geq \min (1, \frac{1}{C_{10}} , \frac{1}{C_{01}} , \frac{1}{C_{11}}) \inf (\sum_{k\in\Box} \|x_k\|_{E_{00}}, \quad x = \sum_{k\in\Box} x_k)$$

$$\geq \min (1, \frac{1}{C_{10}} , \frac{1}{C_{01}} , \frac{1}{C_{11}}) \|x\|_{E_{00}}$$

onde C_k é a constante de imersão de E_k em E_{00}.

0.4.3. DEFINIÇÃO. Um espaço de Banach X é chamado espaço intermediário em relação a família admissível $\mathbb{E} = (E_k , \; k \in \Box)$ se tivermos as imersões

$$(1) \qquad \cap\mathbb{E} \subset X \subset \Sigma\mathbb{E} .$$

Lembremos que o simbolo $\subset$ significa algébrica e continuamente imerso.

0.5. FUNÇÕES BIHARMÔNICAS, NÚCLEO DE POISSON E UM CRITÉRIO DE ANALITICIDADE PARA A POLIFAIXA S_2

0.5.1. Denotaremos por $S_2 = S_1 \times S_1$ a 2-faixa unitária, isto é, o conjunto dos pares $z = (z_1, z_2)$ em $\mathbb{C}^2$ tais que $0 \leq \mathrm{Re}(z_j) \leq 1$ e $\mathrm{Im}\, z_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2$. Por $\overset{\circ}{S}_2$ entenderemos o interior de S_2. Sendo $z_j = x_j + iy_j$ escreveremos $z = x + iy$ onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

Observe que a fronteira de S_2 é o conjunto

$$\partial S_1 \times S_1 \cup S_1 \times \partial S_1.$$

O conjunto

$$F = \{z \in S_2 : z = k + iy,\ k \in \square\} = \partial S_1 \times \partial S_1$$

é dito fronteira reduzida de S_2 e no nosso estudo desempenha um papel fundamental.

0.5.2. DEFINIÇÃO. Dizemos que uma função u (real ou complexa) definida em S_2 é *biharmônica* em um dominio $E = E_1 \times E_2 \subset S_2$ se $u(z_1, z_2)$ é harmônica separadamente, em cada par de variáveis (x_j, y_j), $j = 1,2$, isto é, $u_{z_2}(x_1, y_1) \in C^2(E_1)$, $u_{z_1}(y_2, y_2) \in C^2(E_2)$ e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0 \quad (z_j = x_j + iy_j,\ j = 1,2).$$

Observe que toda função holomorfa $u : E \to \mathbb{C}$ é biharmônica em E

pois se fatorarmos o operador laplaciano na forma

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

e escrevermos $u(z_1,z_2) = U(x_1,y_1;x_2,y_2) + iV(x_1,y_1;x_2,y_2)$ teremos, em cada variável z_j separadamente, que a condição

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} + i\frac{\partial u}{\partial y_j} = 0 \quad \text{é equivalente ao sistema} \quad \begin{cases} U_{x_j} = V_{y_j} \\ U_{y_j} = -V_{x_j} \end{cases} \quad j = 1,2$$

que são precisamente as condições de Cauchy-Riemann. Também, a parte real de qualquer função analítica em E é biharmônica em E mas não é obviamente, analítica, se $u(z)$ não é constante. Ainda mais, u é biharmônica em E se e somente se as partes real e imaginária são biharmônicas em E. (Ver [27]).

0.5.3. O *núcleo de Poisson* para a faixa unitária S_1 pode ser obtido do núcleo de Poisson para o semiplano através de uma aplicação conforme do semiplano sobre a faixa.

Explicitamente, estes núcleos são:

$$(1)\quad P_o(z,t) = \tfrac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\cosh\pi(t-y) - \cos\pi x}, \quad z = x+iy \text{ e } 0 < x < 1.$$

$$(2)\quad P_1(z,t) = \tfrac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\cosh\pi(t-y) + \cos\pi x}, \quad z = x+iy \text{ e } 0 < x < 1.$$

Agora para $k = (k_1,k_2) \in \square$ definimos o k-núcleo de Poisson para a polifaixa S_2 como sendo:

$$(3)\qquad P_k(z,t) = \prod_{j=1}^{2} P_{k_j}(z_j,t_j)$$

onde $z = (z_1, z_2)$ com $z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1,2)$ e $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.

Observemos que $P_k(z,t)$ são não negativos e

$$\int_{\mathbb{R}^2} P_k(z,t)\,dt = x(k)$$

onde

$$x(k) = \prod_{j=1}^{2} [(1 - k_j) + (-1)^{1-k_j} x_j]$$

e que

$$\sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^2} P_k(z,t)\,dt = 1 \qquad (x_j = \mathrm{Re}(z_j),\ 0 < x = (x_1, x_2) < 1)$$

O Lema a seguir é uma versão do principio do módulo máximo para a polifaixa S_2.

0.5.4. LEMA. Sejam F um espaço de Banach e $f : S_2 \to F$ uma função contínua e limitada em S_2, holomorfa em $\overset{o}{S}_2$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}^2$ e $k = (k_1, k_2) \in \square$ temos

$$\| f(k + iy) \|_F \leq M.$$

Então

$$\| f(z) \|_F \leq M \quad \text{para todo} \quad z = (z_1, z_2) \in S_2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pg. 3.

OBSERVAÇÃO. Se $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ então podemos substituir a analiticidade em $\overset{o}{S}_2$ pela biharmonicidade em $\overset{o}{S}_2$.

Veremos agora um critério de analiticidade para funções definidas na polifaixa S_2.

0.5.5. LEMA. Sejam $g_k(t)$ funções (reais ou complexas) contínuas e limitadas em $\mathbb{R}^2$, para cada $k \in \square$. Então existe uma função F definida em S_2 satisfazendo as condições:

(1) F é biharmônica em $\overset{\circ}{S}_2$.

(2) F é contínua e limitada em S_2.

(3) $F(k + it) = g_k(t), \quad t \in \mathbb{R}^2, \ k \in \square.$

Mais ainda,

(4) $$F(z) = \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} P_k(z,t) g_k(t)dt$$

onde $z = (z_1,z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = (x_1, x_2) + i(y_1,y_2) = x + iy$ e $t = (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pg. 158.

Do principio do módulo máximo para a polifaixa S_2 e do lema anterior segue o corolário abaixo.

0.5.6. COROLÁRIO. Seja $F(z)$ uma função biharmônica em $\overset{\circ}{S}_2$, contínua e limitada em S_2. Então

$$F(z) = \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} F(k + it)P_k(z,t)dt$$

0.5.7. COROLÁRIO. Seja A um espaço de Banach complexo e $f : S_2 \to A$ analítica em $\overset{\circ}{S}_2$, contínua e limitada em S_2. Então:

$$f(z) = \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} f(k+it)P_k(z,t)dt$$

DEMONSTRAÇÃO. Considere a função $h(z)$ igual ao membro direito da igualdade acima e para $L \in A'$ teremos pelo corolário anterior:

$$L(h(z)) = \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} L(f(k+it))P_k(z,t)dt = L(f(z))$$

portanto $h(z) = f(z)$.

0.5.8. TEOREMA. Sejam $g_k(t)$ funções complexas contínuas e limitadas em $\mathbb{R}^2$, $k \in \square$. Para que uma função $\psi(z)$, $z \in S_2$, da forma:

$$\psi(z) = \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} g_k(t)P_k(z,t)dt$$

seja analítica em $\overset{o}{S}_2$ é condição necessária e suficiente que para qualquer função escalar $\varphi(z)$ contínua e limitada em S_2, analítica em $\overset{o}{S}_2$ e nula em $z = \Theta = (\theta_1,\theta_2)$ valha a igualdade

$$(1) \qquad \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(k+it)g_k(t)P_k(\Theta,t)dt = 0 \qquad (0 < \Theta < 1)$$

DEMONSTRAÇÃO. Condição Necessária.

Como $\psi(z)\varphi(z)$ é analítica em $\overset{o}{S}_2$, contínua e limitada em S_2 segue do corolário 0.5.6 que

$$\varphi(z)\psi(z) = \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(k+it)\psi(k+it)P_k(z,t)dt.$$

Em $z = \Theta$ teremos, como $\psi(k+it) = g_k(t)$,

$$0 = \varphi(\Theta)\psi(\Theta) = \sum_{k\in\Box} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(k+it)g_k(t)P_k(\Theta,t)dt \quad .$$

Condição Suficiente. Pelo lema 0.5.5. podemos encontrar uma função $u(z)$ contínua e limitada em S_2, biharmônica em $\overset{\circ}{S}_2$ e tal que $u(k+it) = g_k(t)$, $k \in \Box$. Assim

$$\sum_{k\in\Box} \int_{\mathbb{R}^2} u(k+it)P_k(\Theta,t)dt = u(\Theta) = u(f_1(0),\ f_2(0)) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(f_1(e^{is_1}), f_2(e^{is_2}))ds_2 ds_1$$

onde $f_j(z)$ é uma transformação conforme do disco $\overline{D}(0,1)$ na faixa S_1 tal que $f_j(0) = \theta_j$ e dada por:

$$\xi = f_j(z) = \frac{1}{i\pi}\log\left(\frac{ze^{-i\pi\theta_j} - e^{i\pi\theta_j}}{z-1}\right),\ z \in \mathbb{C},\ z \neq 1, e^{i2\pi\theta_j}\ ;\ j=1,2.$$

Observemos que $z = [(e^{i\pi\xi} - e^{i\pi\theta_j})/(e^{i\pi\xi} - e^{-i\pi\theta_j})]$ e que $f_j(e^{is})$ é igual a it ou $1+it$ $(0 \leq s \leq 2\pi)$.

Definindo $h(s) = h(s_1,s_2) = g_k(ik_1 - if_1(e^{is_1}),\ ik_2 - if_2(e^{is_2}))$ se $\operatorname{Re} f_j(e^{is_j}) = k_j$ onde $k = (k_1,k_2) \in \Box$ (neste caso chamamos h de "função associada" a g_k) teremos:

$$(2) \qquad \sum_{k\in\Box} \int_{\mathbb{R}^2} g_k(t)P_k(\Theta,t)dt = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s_1,s_2)ds_1 ds_2$$

A igualdade (2) permanece válida se substituirmos a função

$g_k(t)$ por $\beta(t)g_k(t)$ onde $\beta(t)$ é contínua e limitada em $\mathbb{R}^2$ e h_1 é a função associada a $\beta(t)g_k(t)$. Assim

$$(3) \qquad \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(t) g_k(t) P_k(\Theta,t)\,dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h_1(s_1,s_2)\,ds_1 ds_2$$

Agora, para $z = (z_1,z_2) \in S_2$, $\varepsilon > 0$ e $n_j (j=1,2)$ um número inteiro positivo, sejam:

$$\varphi_j(z_j) = [(e^{i\pi z_j} - e^{i\pi\theta_j})/(e^{i\pi z_j} - e^{-i\pi\theta_j})]^{n_j}$$

$$\varphi(z) = \prod_{j=1}^{2} \varphi_j(z_j) e^{-\varepsilon z_j^2}$$

$$\text{e } \beta(z) = \prod_{j=1}^{2} \varphi_j(z_j)$$

Da igualdade (1) temos

$$\sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(k+it) g_k(t) P_k(\Theta,t)\,dt = 0$$

e passando ao limite quando $\varepsilon \to 0$ obtemos

$$(4) \qquad \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(k+it) g_k(t) P_k(\Theta,t)\,dt = 0$$

e da igualdade (3) temos

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h_1(s_1,s_2)\,ds_1 ds_2 = 0$$

onde

$$h_1(s_1,s_2) = \beta(k_1 + i(ik_1 - if_1(e^{is_1})), k_2 + i(ik_2 - if_2(e^{is_2}))) \cdot$$

$$\times\ g_k(ik_1 - if_1(e^{is_1}), ik_2 - if_2(e^{is_2}))$$

$$(\mathrm{Re}\, f_j(e^{is_j}) = k_j, \quad k = (k_1,k_2) \in \square).$$

Ou seja

$$h_1(s_1,s_2) = \beta(f_1(e^{is_1}), f_2(e^{is_2}))h(s_1,s_2).$$

Como $\varphi_j(f_j(e^{is_j})) = e^{in_js_j}$, $j = 1,2$, temos

$$\beta(f_1(e^{is_1}), f_2(e^{is_2})) = \prod_{j=1}^{2} e^{in_js_j} = \exp(i \sum_{j=1}^{2} n_js_j).$$

Assim

$$h_1(s_1,s_2) = [\exp(i \sum_{j=1}^{2} n_js_j)]\, h(s_1, s_2)$$

e portanto

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s_1,s_2)e^{i(n_1s_1+n_2s_2)} ds_1ds_2 = 0.$$

Vemos então que os coeficientes de Fourier $C_{-n} = C_{-n_1,-n_2}$ de h são nulos se $-n_j < 0$, $j = 1,2$.

Mostraremos a seguir que se uma das componentes dos indices dos coeficientes de Fourier de h for negativa então o respectivo coeficiente será nulo. Vamos então mostrar que $C_{-n_1,n_2} = C_{n_1,-n_2} = 0$ $n_j > 0$ $j = 1,2$.

Consideremos, para t_2 fixo em $\mathbb{R}$, as funções:

$$g_0(t_1) = g_{00}(t_1,t_2)$$
$$(t_1 \in \mathbb{R})$$
$$g_1(t_1) = g_{10}(t_1,t_2)$$

Para qualquer função $\varphi : S_1 \to \mathbb{C}$ contínua e limitada em S_1, analítica em $\overset{\circ}{S}_1$ e nula em $z = \theta_1$ a igualdade (1) nos permite escrever:

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(it_1)g_{00}(t_1,t_2)P_0(\theta_1,t_1)dt_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(1 + it_1)g_{10}(t_1,t_2)P_1(\theta_1,t_1)dt_1 = 0.$$

Analogamente, para φ nas condições acima, teremos:

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(it_1)g_{01}(t_1,t_2)P_0(\theta_1,t_1)dt_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(1 + it_1)g_{11}(t_1,t_2)P_1(\theta_1,t_1)dt_1 = 0.$$

Escolhemos agora um número s_2 em $(0,2\pi)$ distinto de $2\pi\theta_2$. Para este número há duas possibilidades: $\operatorname{Re} f_2(e^{is_2}) = 0$ ou $\operatorname{Re} f_2(e^{is_2}) = 1$. Consideremos inicialmente o caso $\operatorname{Re} f_2(e^{is_2}) = 0$ e fixemos t_2 $(t_2 = -if_2(e^{is_2}))$. Como $g_0(t_1)$ e $g_1(t_1)$ são contínuas e limitadas em $\mathbb{R}$ então pelo Lema anterior existe uma função $u(z_1)$ harmônica em $\overset{\circ}{S}_1$, contínua e limitada em S_1, tal que

$$u(it_1) = g_0(t_1) \quad \text{e} \quad u(1 + it_1) = g_1(t_1).$$

Ainda mais, associadas às funções $g_0(t_1)$ e $g_1(t_1)$ temos as funções

$$h(s_1,s_2) = g_0(-\,if_1(e^{is_1})) \quad \text{se} \quad \operatorname{Re} f_1(e^{is_1}) = 0$$

e

$$h(s_1,s_2) = g_1(i - if_1(e^{is_1})) \quad \text{se} \quad \operatorname{Re} f_1(e^{is_1}) = 1.$$

Assim:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(t_1)P_0(\theta_1,t_1)dt_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t_1)P_1(\theta_1,t_1)dt_1 =$$

$$= u(\theta_1) = u(f_1(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(f_1(e^{is_1}))ds_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s_1,s_2)ds_1$$

onde

$$h(s_1,s_2) = g_{00}(-\,i\,f_1(e^{is_1}),\, -\,if_2(e^{is_2})) \quad \text{se} \quad \operatorname{Re} f_1(e^{is_1}) = 0$$

e

$$h(s_1,s_2) = g_{10}(i - if_1(e^{is_1}),\, -\,if_2(e^{is_2})) \quad \text{se} \quad \operatorname{Re} f_1(e^{is_1}) = 1$$

ou seja

$$(7) \qquad \sum_{j=0}^{1} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{jo}(t_1,t_2)P_j(\theta_1,t_1)dt_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s_1,s_2)ds_1.$$

De modo analogo, se $\operatorname{Re} f_2(e^{is_2}) = 1$ obtemos

$$(8) \qquad \sum_{j=0}^{1} \int_{-\infty}^{\infty} g_{j1}(t_1,t_2)P_j(\theta_1,t_1)dt_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s_1,s_2)ds_1$$

onde

$$h(s_1,s_2) = g_{01}(-\,if_1(e^{is_1}),\, i - if_2(e^{is_2})) \quad \text{se} \quad \operatorname{Re} f_1(e^{is_1}) = 0$$

e

$$h(s_1,s_2) = g_{11}(i - if_1(e^{is_1}),\ i - if_2(e^{is_2})) \text{ se } \operatorname{Re} f_1(e^{is_1}) = 1.$$

Agora sendo

$$\varphi(z) = [(e^{i\pi z} - e^{i\pi\theta_1})/(e^{i\pi z} - e^{-i\pi\theta_1})]^{n_1} e^{\varepsilon z^2}$$

definida para $z \in S_1$, usando (5) e (7) e procedendo como anteriormente encontramos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s_1,s_2)e^{in_1s_1}ds_1 = 0.$$

Assim,

$$C_{-n_1,n_2} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s_1,s_2)e^{in_1s_1}e^{-in_2s_2}ds_1ds_2 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} h(s_1,s_2)e^{in_1s_1}ds_1\right]e^{-in_2s_2}ds_2 = 0.$$

De modo analogo, usando (6) e (8) obtemos

$$C_{n_1,-n_2} = 0$$

e portanto, se pelo menos uma das componentes dos índices dos coeficientes de Fourier de h for negativa então o respectivo coeficiente é nulo.

Desde que o sistema $\{e^{i(n_1s_1+n_2s_2)} / n_1,n_2 \in \mathbb{Z}\}$

é um sistema ortogonal completo em $L^2([0,2\pi]\times[0,2\pi])$ e h pertence a este espaço segue que h é a soma de sua série de Fourier. Logo,

$$h(s_1,s_2) = \sum_{\substack{n_1\geq 0\\ n_2\geq 0}} C_{n_1,n_2} e^{i(n_1s_1+n_2s_2)}$$

onde

$$C_{n_1,n_2} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s_1,s_2)e^{-in_1s_1-in_2s_2}ds_1ds_2.$$

Desde que h é limitada temos que $|h(s_1,s_2)| \leq M$ para todo (s_1,s_2) em $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ e assim $|C_{n_1,n_2}| \leq M$. Portanto para z_1 e z_2 em $\mathbb{C}$, $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ teremos:

$$\sum_{j=0}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_2} |C_{ij}\ z_1^j z_2^i| \leq \frac{M}{(1-|z_1|)(1-|z_2|)}$$

quaisquer que sejam os números inteiros não negativos n_1 e n_2. Isto implica que a série dupla

$$\sum_{n_1\geq 0}\ \sum_{n_2\geq 0} C_{n_1,n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2}$$

é absolutamente convergente em $D(0,1) \times D(0,1)$.

Portanto a série acima define uma função $\bar{h}(z_1,z_2)$ holomorfa no disco duplo $D(0,1) \times D(0,1)$. Como $\bar{h}(z_1,z_2)$ é limitada neste disco temos, para z_2 fixo, que existe o limite

$$\lim_{z_1\to e^{is_1}} \bar{h}(z_1,z_2)$$

para quase todo s_1 em $[0,2\pi]$. De modo análogo existe o limite

$$\lim_{z_2\to e^{is_2}} \bar{h}(z_1,z_2)$$

para quase todo s_2 em $[0,2\pi]$, com z_1 fixo em $D(0,1)$.

Finalmente, sendo $\bar{h}$ analítica e limitada em $D(0,1) \times D(0,1)$ segue que o limite não tangencial de $\bar{h}$ existe em quase todo ponto da fronteira reduzida

$$C(0,1) \times C(0,1) = \{(e^{is_1}, e^{is_2}) / s_1, s_2 \in [0,2\pi]\}$$

e seu valor em (e^{is_1}, e^{is_2}) é igual a $h(s_1,s_2)$.

Definimos agora a função

$$G(z_1,z_2) = \bar{h}(f_1^{-1}(z_1),\ f_2^{-1}(z_2)).$$

Obviamente $G(z_1,z_2)$ é holomorfa e limitada em $\overset{\circ}{S}_2$ e pode ser extendida continuamente em S_2.

Ainda mais

$$G(k_1 + it_1,\ k_2 + it_2) = \bar{h}(f_1^{-1}(k_1 + it_1), f_2^{-1}(k_2 + it_2)) =$$

$$= \bar{h}(e^{is_1}, e^{is_2}) = h(s_1,s_2) =$$

$$= g_k(ik_1 - if_1(e^{is_1}),\ ik_2 - if_2(e^{is_2})) = g_k(t_1,t_2).$$

Portanto obtemos uma função $G(z_1,z_2)$ contínua e limitada em S_2, analítica em $\overset{\circ}{S}_2$ e tal que $G(k + it) = g_k(t)$. Então pelo Corolário 0.5.6, temos:

$$G(z_1,z_2) = \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^2} g_k(t) P_k(z,t)\,dt$$

ou seja $G(z) = \psi(z)$.

CAPÍTULO 1

ESCALAS MÚLTIPLAS DE ESPAÇOS DE BANACH

Neste Capítulo desenvolvemos a teoria das escalas múltiplas de espaços de Banach. A idéia desta teoria é baseada na interpolação de quatro espaços de Banach e dois parâmetros desenvolvida por Fernandez em [10], [11] e [12]. Assim, da teoria usual de escala a um parâmetro entre dois espaços de Banach passaremos a estudar as escalas biparamétricas entre quatro espaços de Banach.

Nos §1 e §2 deste Capítulo o conceito de escalas múltiplas de espaços de Banach é introduzido e simples propriedades são estudadas. Nos §3 e §4 nós introduzimos o conceito de escalas normais e famílias relacionadas, definidas como aquelas famílias que podem ser conectadas por uma escala normal contínua. Nós obtemos uma condição necessária e suficiente para que duas famílias sejam relacionadas (teorema 1.4.5). No §5 estudamos os efeitos sobre uma escala normal quando tomamos o seu completamento relativo. Nos §6, §7 e §8 nós construimos as escalas normais maximais e minimais e teoremas gerais de interpolação são estabelecidos (Teoremas 1.7.10 e 1.8.1).

1.1. DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES BÁSICAS

Vamos denotar por $\square$ o conjunto dos $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que $k_j = 0$ ou 1, $j = 1,2$.

Dados $\alpha_{oo} = \alpha_o = (\alpha_o^1, \alpha_o^2)$ e $\alpha_{11} = \alpha_1 = (\alpha_1^1, \alpha_1^2)$ em $\mathbb{R}^2$, o conjunto

$$A = \{\alpha_k, k \in \square\} = \{\alpha_{00}, \alpha_{10}, \alpha_{01}, \alpha_{11}\}$$

onde $\alpha_k = \alpha_{k_1 k_2} = (\alpha_{k_1}^1, \alpha_{k_2}^2)$ será chamado de família de vértices pivoteada por α_{oo} e α_{11}.

Uma família de quatro espaços de Banach

$$\mathbb{E} = (E_{\alpha_k}, k \in \square)$$

denomina-se um esqueleto de espaços pivoteado por $E_{\alpha_{oo}}$ e $E_{\alpha_{11}}$.

Em tudo que segue suporemos que $E_{\alpha_{oo}} \neq E_{\alpha_{11}}$ e que $\alpha_{oo} < \alpha_{11}$.

1.1.1. DEFINIÇÃO. Uma família $(E_\alpha, \alpha_{oo} \leq \alpha \leq \alpha_{11})$ de espaços de Banach é uma escala múltipla relativa ao esqueleto $\mathbb{E} = (E_{\alpha_k}, k \in \square)$ quando verificar as seguintes condições:

(EM1) Se $\beta = (\beta^1, \beta^2) \geq \alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$ então E_β está densamente imerso em E_α e

$$\|x\|_{E_\alpha} \leq C(\alpha,\beta) \|x\|_{E_\beta}, \quad x \in E_\beta. \tag{1}$$

(EM2) Se $\alpha_{oo} \leq \beta_{oo} \leq \gamma \leq \beta_{11} \leq \alpha_{11}, (\beta_{oo} < \beta_{11})$, então existe $C = C(\beta_o, \gamma, \beta_1)$ tal que

$$(2) \quad \|x\|_{E_\gamma} \leq C \|x\|_{E_{\beta_{oo}}}^{u_0^1 u_0^2} \|x\|_{E_{\beta_{10}}}^{u_1^1 u_0^2} \|x\|_{E_{\beta_{01}}}^{u_0^1 u_1^2} \|x\|_{E_{\beta_{11}}}^{u_1^1 u_1^2}, \quad x \in E_{\beta_{11}}$$

onde

$$u_o^j = (\beta_1^j - \gamma^j)/(\beta_1^j - \beta_0^j) \quad \text{e} \quad u_1^j = (\gamma^j - \beta_0^j)/(\beta_1^j - \beta_0^j) \quad j = 1,2.$$

A condição (2) pode também ser escrita na forma

$$\|x\|_{E_\gamma} \leq C \prod_{k \in \square} \|x\|_{E_{\beta_k}}^{u(k)}, \quad x \in E_{\beta_1}$$

onde

$$u(k) = \prod_{j=1}^{2} u_{k_j}^j \quad \text{e} \quad u_{k_j}^j = (\beta_1^j - \gamma^j)/(\beta_1^j - \beta_o^j) \quad \text{se} \quad k_j = 0,$$

$$u_{k_j}^j = (\gamma^j - \beta_o^j)/(\beta_1^j - \beta_o^j) \quad \text{se} \quad k_j = 1.$$

Observamos que $\sum_{k \in \square} u(k) = 1$ e que

$$\beta_o^j(\beta_1^j - \gamma^j)/(\beta_1^j - \beta_o^j) + \beta_1^j(\gamma^j - \beta_o^j)/(\beta_1^j - \beta_o^j) = \gamma^j \qquad j = 1,2.$$

ou seja

$$\beta_o^j u_o^j + \beta_1^j u_1^j = \gamma^j, \quad j = 1,2.$$

1.1.2. EXEMPLO. Dado quatro espaços de Banach $\mathbb{E} = (E_k\ ,\ k \in \square)$ tal que se $k \geq k'$ então E_k está densamente imerso em $E_{k'}$, então podemos construir uma escala $(E_\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq 1)$ como segue:

$$E_\alpha = E_{oo} \quad \text{para} \quad (0,0) \leq (\alpha^1,\alpha^2) < (1,1)$$

$$E_\alpha = E_{11} \quad \text{para} \quad (\alpha^1,\alpha^2) = (1,1)$$

$$E_\alpha = E_{10} \quad \text{para} \quad \alpha^1 = 1 \quad \text{e}$$

$$E_\alpha = E_{01} \quad \text{para} \quad \alpha^2 = 1.$$

Neste caso $C(\beta_o,\gamma,\beta_1) = 1$ para $\beta_1 = \beta_{11} < (1,1)$ e sendo C_{01}, C_{10}, C_{11} as respectivas constantes de imersão de E_{01}, E_{10} e E_{11} em E_{oo} teremos que

$$C(\beta_o,\gamma,1) = C_{10}^{u_1^1 u_0^2}\ C_{01}^{u_0^1 u_1^2}\ C_{11}^{u_1^1 u_1^2} \quad \text{para} \quad \beta_1 = (1,1)$$

pois

$$\|x\|_{E_{oo}} = \|x\|_{oo} = \|x\|_{oo}^{u_0^1 u_0^2}\ \|x\|_{oo}^{u_1^1 u_0^2}\ \|x\|_{oo}^{u_0^1 u_1^2}\ \|x\|_{oo}^{u_1^1 u_1^2}$$

$$\leq C_{10}^{u_1^1 u_0^2}\ C_{01}^{u_0^1 u_1^2}\ C_{11}^{u_1^1 u_1^2}\ \|x\|_{E_{\beta_{oo}}}^{u_0^1 u_0^2}\ \|x\|_{E_{\beta_{10}}}^{u_1^1 u_0^2}\ \|x\|_{E_{\beta_{01}}}^{u_0^1 u_1^2}\ \|x\|_{E_{\beta_{11}}}^{u_1^1 u_1^2}.$$

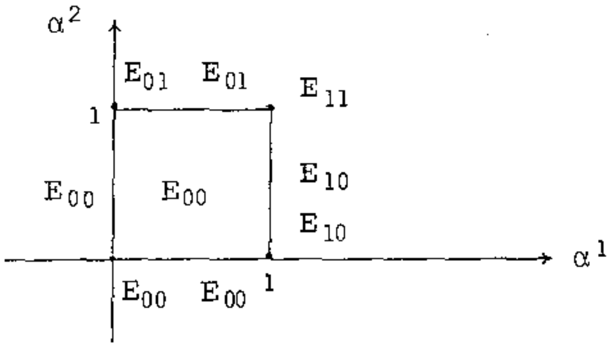
Analogamente

$$C(\beta_o,\gamma,\beta_1) = C_{10}^{u_1^1 u_0^2 + u_1^1 u_1^2} \quad \text{para} \quad \beta_{11} = (1,\beta_1^2), \quad 0 < \beta_1^2 < 1$$

e

$$C(\beta_o,\gamma,\beta_1) = C_{01}^{u_0^1 u_1^2 + u_1^1 u_1^2} \qquad \text{para} \qquad \beta_{11} = (\beta_1^1, 1),\ 0 < \beta_1^1 < 1.$$

A configuração é a seguinte:



Uma escala construida deste modo é dita escala trivial.

1.1.3. EXEMPLO. Seja $P = (p_1, p_2)$ um par com $1 \leq p_i < \infty$, $i=1,2$. Uma sequência dupla $a = (a_{mn})$ de números reais (ou complexos) pertence a $\ell^P = \ell^{p_2}(\ell^{p_1})$ se o número obtido tomando-se a p_1-norma em m e a p_2-norma em n é finito. O número assim obtido será denotado por

$$\| a \|_P = \| a \|_{p_1 p_2} = \| a_{mn} \|_{\ell^P} .$$

Assim

$$\| a \|_P = \left[\sum_n \left[\sum_m | a_{mn} |^{p_1} \right]^{p_2/p_1} \right]^{1/p_2}.$$

No que segue as letras P, Q, R,... sempre designarão pares $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2), \ldots$ com componentes entre 1 e ∞, isto é, $1 \le p_i < \infty$, $i = 1,2$. Também se $G(P,Q,\ldots,R)$ é uma relação entre $P, Q, \ldots, R$ isto significa que a relação vale para cada componente $p_i, q_i, \ldots, r_i$, $i = 1,2$.

Aplicando sucessivamente a desigualdade de Minkowski teremos, para a e b em ℓ^P:

$$\|a + b\|_{\ell^P} \le \|a\|_{\ell^P} + \|b\|_{\ell^P}$$

isto é, ℓ^P é um espaço normado. Ainda mais, ℓ^P é um espaço de Banach.

Temos também:

(i) Se $Q \ge P$ então $\ell^P \subset \ell^Q$ com imersão densa e constante de imersão igual a um.

Com efeito, usando a desigualdade $\Sigma |x_n|^\alpha \le [\Sigma |x_n|]^\alpha$, $\alpha \ge 1$, teremos

$$\|a\|_Q = [\sum_n [\sum_m |a_{mn}|^{q_1}]^{q_2/q_1}]^{1/q_2} \le$$

$$\le [\sum_n [\sum_m |a_{mn}|^{p_1}]^{q_2/p_1}]^{1/q_2} \le$$

$$\le [\sum_n [\sum_m |a_{mn}|^{p_1}]^{p_2/p_1}]^{1/p_2} = \|a\|_P .$$

A densidade decorre do fato que o conjunto das sequências

(a_{mn}) tal que $a_{mn} = 0$ para $m > N_o$, $n > N_1$ é denso em ℓ^P.

(ii) Se $Q \geq P$ e $a \in \ell^P$ então $a \in \ell^R$ onde $1/R = \theta/P + (1-\theta)/Q$, $0 \leq \theta = (\theta_1, \theta_2) \leq 1$. Com efeito, usando sucessivamente a desigualdade de Holder teremos:

$$\|a\|_R = [\sum_n [\sum_m |a_{mn}|^{r_1}]^{r_2/r_1}]^{1/r_2}$$

$$= [\sum_n [\sum_m |a_{mn}|^{\theta_1 r_1} \times |a_{mn}|^{(1-\theta_1)r_1}]^{r_2/r_1}]^{1/r_2} \leq$$

$$\leq [\sum_n [\sum_m |a_{mn}|^{p_1}]^{\theta_1 r_2/p_1} \times [\sum_m |a_{mn}|^{q_1}]^{(1-\theta_1)r_2/q_1}]^{1/r_2} \leq$$

$$\leq [\sum_n [\sum_m |a_{mn}|^{p_1}]^{r_2/p_1}]^{\theta_1/r_2} [\sum_n [\sum_m |a_{mn}|^{q_1}]^{r_2/q_1}]^{(1-\theta_1)/r_2}$$

$$= [\sum_n [\sum_m |a_{mn}|^{p_1}]^{1/p_1(\theta_2 r_2)} [\sum_m |a_{mn}|^{p_1}]^{1/p_1(1-\theta_2)r_2}]^{\theta_1/r_2} \times$$

$$\times [\sum_n [\sum_m |a_{mn}|^{q_1}]^{1/q_1(\theta_2 r_2)} [\sum_m |a_{mn}|^{q_1}]^{1/q_1(1-\theta_2)r_2}]^{(1-\theta_1)/r_2}$$

$$\leq \|a\|_{p_1p_2}^{\theta_1\theta_2} \|a\|_{p_1q_2}^{\theta_1(1-\theta_2)} \|a\|_{q_1p_2}^{(1-\theta_1)\theta_2} \|a\|_{q_1q_2}^{(1-\theta_1)(1-\theta_2)}$$

e portanto com a identificação $\ell^{R(\theta)} = E_\theta$ teremos que $(E_\theta,\ 0 \leq \theta \leq 1)$ é uma escala relativa ao esqueleto

$$\mathbb{E} = (\ell^{q_1q_2}, \ell^{q_1p_2}, \ell^{p_1q_2}, \ell^{p_1p_2}) = (E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11}).$$

1.2. PROPRIEDADES DAS ESCALAS DE ESPAÇOS DE BANACH

1.2.1. PROPOSIÇÃO. Se numa escala múltipla $(E_\alpha, \alpha_{oo} \leq \alpha \leq \alpha_{11})$ relativa ao esqueleto $\mathbb{E} = (E_{\alpha_k}, k \in \square)$ substituirmos o indice α por um indice $\bar{\alpha}$ de acordo com a fórmula:

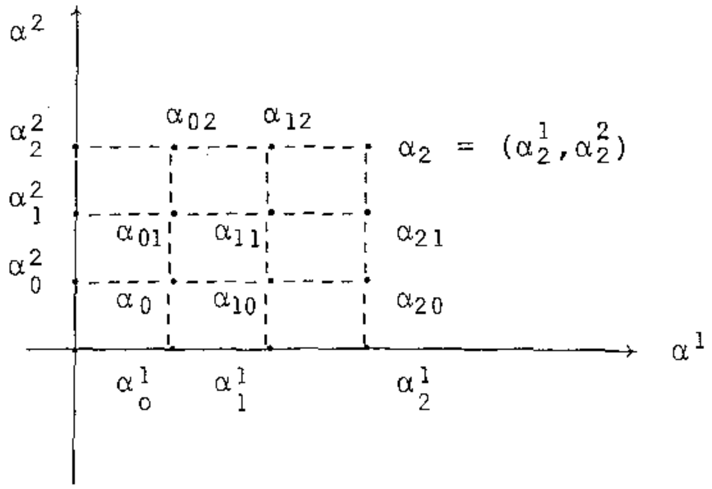
$$\alpha^j = K^j \bar{\alpha}^j + \theta^j \quad (K^j > 0), \qquad j = 1,2.$$

então os espaços $F_{\bar{\alpha}} = E_{K\bar{\alpha}+\theta}$, $\bar{\alpha}_o \leq \bar{\alpha} \leq \bar{\alpha}_1$, formam uma escala múltipla relativa ao esqueleto $\mathbb{E} = (E_{\bar{\alpha}_k}, k \in \square)$. Isto segue das equações $(\gamma - \beta)/(\gamma - \alpha) = (\bar{\gamma} - \bar{\beta})/(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})$ e $(\bar{\beta} - \bar{\alpha})/(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) = (\beta - \alpha)/(\gamma - \alpha)$. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\alpha_o = \alpha_{oo} = (0,0)$ e $\alpha_1 = \alpha_{11} = (1,1)$.

1.2.2. PROPOSIÇÃO. Se normas equivalentes são introduzidas nos espaços E_α de uma escala múltipla então eles ainda formam uma escala múltipla.

1.2.3. PROPOSIÇÃO. Consideremos uma família de espaços de Banach $(E_\alpha, \alpha_{oo} \leq \alpha \leq \alpha_{22})$ e α_{11} um par ordenado entre $\alpha_o = \alpha_{oo}$ e $\alpha_2 = \alpha_{22}$. A configuração é a seguinte:

$(\alpha_{oo} < \alpha_{11} < \alpha_{22})$



Suponhamos que as subfamílias E formam escalas múltiplas relativas aos esqueletos pivoteados por α_o e α_1, α_1 e α_2, α_{10} e α_{21}, α_{01} e α_{12}. Então a condição necessária e suficiente para que a família $(E_\alpha, \alpha_o \leq \alpha \leq \alpha_2)$ forme uma escala múltipla relativa ao esqueleto pivoteado por α_o e α_2 é que as duas condições abaixo sejam satisfeitas:

(i) Para todo $\gamma_o < \alpha_1$ e $\gamma_1 > \alpha_1$ vale

$$\|x\|_{E_{\alpha_1}} \leq C(\gamma_o, \alpha_1, \gamma_1) \prod_{k \in \square} \|x\|_{E_{\gamma_k}}^{u(k)}$$

onde

$$u(k) = \prod_{j=1}^{2} u^j_{k_j} \quad \text{e} \quad u^j_{k_j} = (\gamma_1^j - \alpha_1^j)/(\gamma_1^j - \gamma_o^j) \quad \text{se} \quad k_j = 0,$$

$$u^j_{k_j} = (\alpha_1^j - \gamma_o^j)/(\gamma_1^j - \gamma_o^j) \quad \text{se} \quad k_j = 1.$$

(ii) Nos lados do quadrado pivoteado par α_o e α_2 temos escalas simples, isto é;

$$(E_\alpha, \alpha_o \leq \alpha \leq \alpha_{20}), \qquad (E_\alpha, \alpha_o \leq \alpha \leq \alpha_{02})$$

$$(E_\alpha, \alpha_{02} \leq \alpha \leq \alpha_2) \quad \text{e} \quad (E_\alpha, \alpha_{20} \leq \alpha \leq \alpha_2)$$

são escalas simples.

Lembramos que uma família de espaços de Banach $(E_\alpha, \alpha_o \leq \alpha \leq \beta_o)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ é uma escala simples se as duas condições abaixo forem satisfeitas:

(a) Para $\beta > \alpha$ o espaço E_β está densamente imerso em E_α e portanto

$$\| x \|_{E_\alpha} \leq C(\alpha, \beta) \| x \|_{E_\beta} .$$

(b) Existe uma constante $C(\alpha, \beta, \gamma)$ finita em todos os pontos do dominio $\alpha_o \leq \alpha < \beta < \gamma \leq \beta_o$ tal que

$$\| x \|_{E_\beta} \leq C(\alpha, \beta, \gamma) \| x \|_{E_\alpha}^{(\gamma-\beta)/(\gamma-\alpha)} \| x \|_{E_\gamma}^{(\beta-\alpha)/(\gamma-\alpha)} \; (x \in E_\gamma).$$

DEMONSTRAÇÃO. Condição suficiente. Suponhamos que para todo $\gamma_o < \alpha_1$ e $\gamma_1 > \alpha_1$ e sendo $\mathbb{E} = (E_{\gamma_k}, k \in \square)$ o esqueleto pivoteado por γ_o e γ_1 tenhamos:

$$\|x\|_{E_{\alpha_1}} \le C(\gamma_o,\alpha_1,\gamma_1)\ \|x\|_{E_{\gamma_o}}^{(\gamma_1^1-\alpha_1^1)/(\gamma_1^1-\gamma_o^1)\times(\gamma_1^2-\alpha_1^2)/(\gamma_1^2-\gamma_o^2)} \times$$

$$\times\ \|x\|_{E_{\gamma_{10}}}^{(\alpha_1^1-\gamma_o^1)/(\gamma_1^1-\gamma_o^1)\times(\gamma_1^2-\alpha_1^2)/(\gamma_1^2-\gamma_o^2)} \times$$

$$\times\ \|x\|_{E_{\gamma_{01}}}^{(\gamma_1^1-\alpha_1^1)/(\gamma_1^1-\gamma_o^1)\times(\alpha_1^2-\gamma_o^2)/(\gamma_1^2-\gamma_o^2)} \times \|x\|_{E_{\gamma_1}}^{(\alpha_1^1-\gamma_o^1)/(\gamma_1^1-\gamma_o^1)\times(\alpha_1^2-\gamma_o^2)/(\gamma_1^2-\gamma_o^2)}$$

Seja θ tal que $\alpha_o < \theta < \alpha_2$. Devemos provar que

$$\|x\|_{E_\theta} \le C(\alpha_o,\theta,\alpha_2)\ \|x\|_{E_{\alpha_o}}^{(\alpha_2^1-\theta^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1)\times(\alpha_2^2-\theta^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)}$$

$$\times\ \|x\|_{E_{\alpha_{20}}}^{(\theta^1-\alpha_o^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1)\times(\alpha_2^2-\theta^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)}$$

$$\times\ \|x\|_{E_{\alpha_{02}}}^{(\alpha_2^1-\theta^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1)\times(\theta_2^2-\alpha_o^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)} \times \|x\|_{E_{\alpha_2}}^{(\theta^1-\alpha_o^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1)\times(\theta^2-\alpha_o^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)}$$

Se $\theta = \alpha_1$ basta tomar $\gamma_o = \alpha_o$; $\gamma_1 = \alpha_2$.

Suponhamos então que $\alpha_o < \theta < \alpha_1$. Como E_α é uma escala em $\alpha_o \le \alpha \le \alpha_1$ temos:

$$\|x\|_{E_\theta} \le C(\alpha_o,\theta,\alpha_1) \times A_1A_2A_3A_4,$$

onde

$$A_1 = \|x\|_{E_{\alpha_o}}^{(\alpha_1^1-\theta^1)/(\alpha_1^1-\alpha_o^1) \times (\alpha_1^2-\theta^2)/(\alpha_1^2-\alpha_o^2)}$$

$$A_2 = \|x\|_{E_{\alpha_{10}}}^{(\theta^1-\alpha_o^1)/(\alpha_1^1-\alpha_o^1) \times (\alpha_1^2-\theta^2)/(\alpha_1^2-\alpha_o^2)}$$

$$A_3 = \|x\|_{E_{\alpha_{01}}}^{(\alpha_1^1-\theta^1)/(\alpha_1^1-\alpha_o^1) \times (\theta^2-\alpha_o^2)/(\alpha_1^2-\alpha_o^2)}$$

$$A_4 = \|x\|_{E_{\alpha_1}}^{(\theta^1-\alpha_o^1)/(\alpha_1^1-\alpha_o^1) \times (\theta^2-\alpha_o^2)/(\alpha_1^2-\alpha_o^2)} .$$

Em A_4 usando a hipótese com $\gamma_o = \alpha_o$ e $\gamma_1 = \alpha_2$ teremos:

$$(1) \quad \|x\|_{E_{\alpha_1}}^{(\theta^1-\alpha_o^1)/(\alpha_1^1-\alpha_o^1) \times (\theta^2-\alpha_o^2)/(\alpha_1^2-\alpha_o^2)} \leq$$

$$\leq [\, C \, \|x\|_{E_{\alpha_{oo}}}^{(\alpha_2^1-\alpha_1^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1)\times(\alpha_2^2-\alpha_1^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)} \|x\|_{E_{\alpha_{20}}}^{(\alpha_1^1-\alpha_o^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1) \times (\alpha_2^2-\alpha_1^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)}$$

$$\times \quad \|x\|_{E_{\alpha_{02}}}^{(\alpha_2^1-\alpha_1^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1) \times (\alpha_1^2-\alpha_o^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)} \quad \times$$

$$\times \quad \|x\|_{E_{\alpha_{22}}}^{(\alpha_1^1-\alpha_o^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1)\times(\alpha_1^2-\alpha_o^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)} \,]^{(\theta^1-\alpha_o^1)/(\alpha_1^1-\alpha_o^1) \times (\theta^2-\alpha_o^2)/(\alpha_1^2-\alpha_o^2)}$$

$$= \; C \, [\, \|x\|_{E_{\alpha_o}}^{(\alpha_2^1-\alpha_1^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1) \times (\alpha_2^2-\alpha_1^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)} \|x\|_{E_{\alpha_{20}}}^{(\alpha_1^1-\alpha_o^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1)\times(\alpha_2^2-\alpha_1^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)}$$

$$\|x\|_{E_{\alpha_{02}}}^{(\alpha_2^1-\alpha_1^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1) \times (\alpha_1^2-\alpha_o^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)} \,]^{(\theta^1-\alpha_o^1)/(\alpha_1^1-\alpha_o^1) \times (\theta^2-\alpha_o^2)/(\alpha_1^2-\alpha_o^2)}$$

$$\|x\|_{E_{\alpha_{22}}}^{(\theta^1-\alpha_o^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1) \times (\theta^2-\alpha_o^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)} .$$

Como E_α é uma escala simples nos lados do quadrado temos:

$$\|x\|_{E_{\alpha_{10}}} \leq C\, \|x\|_{E_{\alpha_o}}^{(\alpha_2^1-\alpha_1^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1)} \|x\|_{E_{\alpha_{20}}}^{(\alpha_1^1-\alpha_o^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1)} .$$

Substituindo esta expressão em A_2 teremos:

$$(2) \quad \|x\|_{E_{\alpha_{10}}}^{(\theta^1-\alpha_o^1)/(\alpha_1^1-\alpha_o^1) \times (\alpha_1^2-\theta^2)/(\alpha_1^2-\alpha_o^2)} \leq$$

$$\leq C\left[\|x\|_{E_{\alpha_0}}^{(\alpha_2^1-\alpha_1^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1)} \|x\|_{E_{\alpha_{20}}}^{(\alpha_1^1-\alpha_o^1)/(\alpha_2^1-\alpha_o^1)} \right]^{(\theta^1-\alpha_o^1)/(\alpha_1^1-\alpha_o^1)\times(\alpha_1^2-\theta^2)/(\alpha_1^2-\alpha_o^2)}$$

Como E_α é uma escala simples nos lados do quadrado temos:

$$\|x\|_{E_{\alpha_{01}}} \leq C\, \|x\|_{E_{\alpha_o}}^{(\alpha_2^2-\alpha_1^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)} \|x\|_{E_{\alpha_{02}}}^{(\alpha_1^2-\alpha_o^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)} .$$

Substituindo esta expressão em A_3 teremos:

$$(3) \quad \|x\|_{E_{\alpha_{01}}}^{(\alpha_1^1-\theta^1)/(\alpha_1^1-\alpha_o^1) \times (\theta^2-\alpha_o^2)/(\alpha_1^2-\alpha_o^2)} \leq$$

$$\leq C\left[\|x\|_{E_{\alpha_o}}^{(\alpha_2^2-\alpha_1^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)} \|x\|_{E_{\alpha_{02}}}^{(\alpha_1^2-\alpha_o^2)/(\alpha_2^2-\alpha_o^2)} \right]^{(\alpha_1^1-\theta^1)/(\alpha_1^1-\alpha_o^1) \times (\theta^2-\alpha_o^2)/(\alpha_1^2-\alpha_o^2)}$$

Agrupando os termos envolvendo $\|x\|_{E_{\alpha_o}}$ em A_1, (1), (2) e (3); idem para os termos envolvendo $\|x\|_{E_{\alpha_{20}}}$ em (1) e (2) e agrupando os termos envolvendo $\|x\|_{E_{\alpha_{02}}}$ em (1) e (3) teremos a nossa tese. O raciocínio é análogo para θ nos outros "quadrados".

1.2.4. PROPOSIÇÃO. Se uma família $(E_\alpha,\ \alpha_o \leq \alpha \leq \alpha_1)$ de espaços normados é dada satisfazendo as condições (EM1) e (EM2) da definição 1.1.1, e pelo menos um dos espaços não é completo então $(E_\alpha,\ \alpha_o \leq \alpha \leq \alpha_1)$ é dita uma escala incompleta.

Consideremos o completamento $\overline{E}_\alpha$ dos espaços E_α.

Assumimos que a seguinte condição é satisfeita:

π) Se $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em E_β e $\|x_n\|_{E_{\alpha_o}} \to 0$ quando $n \to \infty$ então também $\|x_n\|_{E_\beta} \to 0$.

OBSERVAÇÃO. Como E_β é denso em $\overline{E}_\beta$ a injeção de E_β em $\overline{E}_\alpha$ $(\beta > \alpha)$ pode ser estendida a um único operador contínuo $\overline{e} : \overline{E}_\beta \to \overline{E}_\alpha$. Como o núcleo de $\overline{e}$ é o conjunto dos elementos de $\overline{E}_\beta$ que são limite de uma sequência de Cauchy em E_β que tende a zero em $\overline{E}_\alpha$ vemos que a condição π) é necessária e suficiente para que $\overline{e}$ seja uma injeção, ou seja, podemos identificar $\overline{E}_\beta$ como subespaço de $\overline{E}_\alpha$.

Em outras palavras seja $x \in \overline{E}_\beta$. Então existe uma sequência de elementos $x_n \in E_\beta$ tal que $\|x_n - x\|_\beta \to 0$. Como $E_\beta \subset E_\alpha$ $(\beta > \alpha)$ os elementos $x_n \in E_\alpha$ e por 1.1.1(1) formam uma sequência de Cauchy em E_α. Logo existe um único ponto limite da sequência $\{x_n\}$ em E_α que é naturalmente identificado com o elemento original $x \in \overline{E}_\beta$. Então cada elemento de $\overline{E}_\beta$ corresponde de modo natural a um elemento de $\overline{E}_\alpha$. O que a condição π) enseja é que vários elementos de $\overline{E}_\beta$ não podem ir no mesmo elemento de $\overline{E}_\alpha$, pois se x' e x'' em $\overline{E}_\beta$ são identificados com o mesmo elemento de $\overline{E}_\alpha$ então existem seqüências $\{x_n'\}$ e $\{x_n''\}$ em E_β tais que:

$$\|x_n' - x'\|_\beta \to 0, \quad \|x_n'' - x''\|_\beta \to 0 \quad \text{e} \quad \|x_n' - x_n''\|_\alpha \to 0$$

e de 1.1.1(1) temos que $\|x_n' - x_n''\|_{\alpha_o} \to 0$ e da condição π) temos $\|x_n' - x_n''\|_\beta \to 0$. Logo $x' = x''$.

Então os espaços $\{\overline{E}_\alpha, \alpha_o \leq \alpha \leq \alpha_1\}$ relativos ao esqueleto $\mathbb{E} = (\overline{E}_{\alpha_k}, k \in \square)$ formam uma escala com as imersões naturais $\overline{E}_\beta \subset \overline{E}_\alpha$ $(\beta > \alpha)$. A validade de 1.1.1(1) e (2) para os espaços $\overline{E}_\alpha$ segue de um óbvio processo de limites.

Encontraremos casos especiais de escalas incompletas onde todos os espaços E_α coincidem como conjuntos, ou seja, $E_\alpha = M$, $\alpha_o \leq \alpha \leq \alpha_1$, mas diferem na norma. Esta escala será chamada escala incompleta com base M.

Toda escala $(E_\alpha, \alpha_o \leq \alpha \leq \alpha_1)$ pode ser obtida completando a escala com base E_{α_1} e as normas dos espaços E_α.

1.3. ESCALAS NORMAIS

1.3.1. DEFINIÇÃO. Uma escala múltipla $(E_\alpha, \alpha_{oo} \leq \alpha \leq \alpha_{11})$ relativa ao esqueleto $\mathbb{E} = (E_{\alpha_k}, k \in \square)$ é dita normal se $C(\alpha,\beta) = C(\beta_o,\gamma,\beta_1) = 1$ na definição 1.1.1, isto é, se as seguintes condições são satisfeitas:

(EN1) Se $\alpha \leq \beta$ então E_β está densamente imerso em E_α e

$$(1) \qquad \|x\|_{E_\alpha} \leq \|x\|_{E_\beta}, \qquad x \in E_\beta.$$

(EN2) Se $\alpha_{oo} \leq \beta_{oo} \leq \gamma \leq \beta_{11} \leq \alpha_{11}$, $\beta_{oo} < \beta_{11}$ e $\mathbb{E} = (E_{\beta_k}, k \in \square)$ é o esqueleto pivoteado por $E_{\beta_{oo}}$ e $E_{\beta_{11}}$ então

$$(2) \qquad \|x\|_{E_\gamma} \leq \|x\|_{E_{\beta_{oo}}}^{u_o^1 u_o^2} \|x\|_{E_{\beta_{10}}}^{u_1^1 u_o^2} \|x\|_{E_{\beta_{01}}}^{u_o^1 u_1^2} \|x\|_{E_{\beta_{11}}}^{u_1^1 u_1^2}, \qquad x \in E_{\beta_{11}},$$

onde

$$u_o^j = (\beta_1^j - \gamma^j)/(\beta_1^j - \beta_o^j) \quad \text{e} \quad u_1^j = (\gamma^j - \beta_o^j)/(\beta_1^j - \beta_o^j) \qquad j = 1,2.$$

1.3.2. OBSERVAÇÃO. A desigualdade 1.3.1(1) mostra que a função $\varphi_x(\alpha) = \|x\|_{E_\alpha}$ $(x \in E_{\alpha_1})$ é "não decrescente" e limitada. Ainda mais, se β_{oo} e β_{11} são dois pontos quaisquer do quadrado pivoteado por α_{oo} e α_{11}, $\alpha_{oo} \leq \beta_{oo} < \beta_{11} \leq \alpha_{11}$, então a combinação convexa de β_{oo} e β_{11} nos dará um ponto β tal que:

$t\beta_{oo} + (1-t)\beta_{11} = \beta$ onde $t = (\beta_1^1 - \beta^1)/(\beta_1^1 - \beta_o^1) = (\beta_1^2 - \beta^2)/(\beta_1^2 - \beta_o^2)$,

$t \in (0,1)$, e das desigualdades 1.3.1(1) e (2) teremos:

$$\|x\|_{E_\beta} \leq \|x\|_{E_{\beta_{oo}}}^{t^2} \|x\|_{E_{\beta_{10}}}^{(1-t)t} \|x\|_{E_{\beta_{01}}}^{t(1-t)} \|x\|_{E_{\beta_{11}}}^{(1-t)(1-t)}$$

$$\leq \|x\|_{E_{\beta_{oo}}}^{t^2} \|x\|_{E_{\beta_{11}}}^{1-t^2} \qquad (x \in E_{\beta_{11}})$$

ou seja

(1) $$\varphi_x(\beta) \leq \varphi_x^{t^2}(\beta_{oo}) \cdot \varphi_x^{1-t^2}(\beta_{11}) \qquad (x \in E_{\beta_{11}})$$

1.3.3. PROPOSIÇÃO. Seja K o quadrado pivoteado por α_{oo} e α_{11}. A função $\varphi_x(\gamma) = \|x\|_{E_\gamma}$ $(x \in E_{\alpha_{11}})$ é contínua no interior de K.

DEMONSTRAÇÃO. Se $x = 0$ então $\varphi_x(\gamma) = 0$ para todo γ. Para $x \neq 0$ seja $h_x(\gamma) = \log \varphi_x(\gamma)$. De 1.3.2.(1) temos:

(1) $$h_x(t\beta_{oo} + (1-t)\beta_{11}) \leq t^2 h_x(\beta_{oo}) + (1-t^2) h_x(\beta_{11}).$$

Provaremos que h_x é contínua em $\overset{o}{K}$.

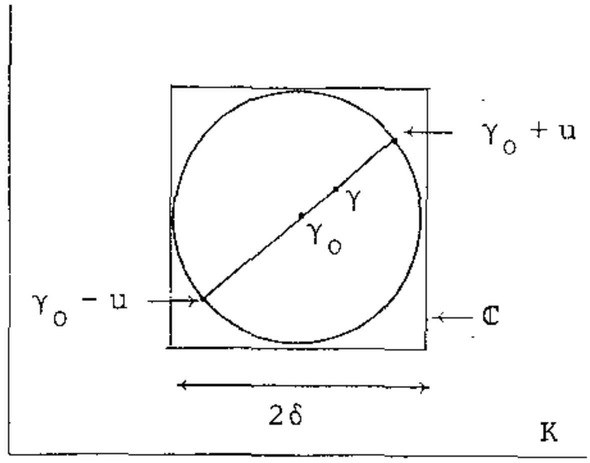
Sejam $\gamma_o \in \overset{o}{K}$, $d = \text{dist}(\gamma_o, \partial K)$ e $\mathbb{C}$ o quadrado com centro em γ_o e lados de comprimento 2δ onde $\sqrt{2}\delta < d$.

A função $h_x(\gamma)$ é limitada em K pois

$$h_x(\alpha_{00}) \leq h_x(\gamma) \leq h_x(\alpha_{11})$$

e portanto

$$|h_x(\gamma)| \leq M, \quad \gamma \in K.$$



Seja γ um ponto qualquer tal que

$$0 < |\gamma - \gamma_o| < \delta$$

e definimos $\gamma_o + u$ e $\gamma_o - u$ na reta que passa por γ_o e γ.

Vamos escrever γ como combinação convexa de $\gamma_o + u$ e γ_o e escreveremos γ_o como combinação convexa de γ e $\gamma_o - u$. Assim, se $t = |\gamma - \gamma_o| \cdot \delta^{-1}$ teremos

$$\gamma = t(\gamma_o + u) + (1 - t)\gamma_o$$

$$\gamma_o = \frac{1}{1+t}\gamma + \frac{t}{1+t}(\gamma_o - u).$$

De (1) teremos:

$$h_x(\gamma) \leq t^2 h_x(\gamma_o + u) + (1 - t^2)h_x(\gamma_o) \leq t^2 M + (1 - t^2)h_x(\gamma_o)$$

ou seja

$$(2) \quad h_x(\gamma) - h_x(\gamma_o) \leq t^2[M - h_x(\gamma_o)] \leq t^2[M - h_x(\gamma_o) + 2M/t]$$

e também

$$h_x(\gamma_o) \leq [1/(1+t)^2]h_x(\gamma) + [(t^2 + t2)/(1+t)^2]h_x(\gamma_o - u)$$

$$\leq [1/(1+t^2)]h_x(\gamma) + [(t^2 + 2t)/(1 + t^2)]M$$

isto é,

$$h_x(\gamma_o) + t^2 h_x(\gamma_o) \leq h_x(\gamma) + (t^2 + 2t)M$$

$$(3) \qquad h_x(\gamma) - h_x(\gamma_o) \geq - t^2[M - h_x(\gamma_o) + 2M/t]$$

De (2) e (3) teremos

$$|h_x(\gamma) - h_x(\gamma_o)| \leq [M - h_x(\gamma_o) + 2M/t]\, t^2$$

$$\leq [M - h_x(\gamma_o)]\, t^2 + 2Mt$$

$$\leq 4Mt = [4M/\delta]\,|\gamma - \gamma_o| .$$

Logo a função $h_x(\gamma)$ é contínua em $\overset{o}{K}$ e portanto a função $\varphi_x(\gamma)$ também será contínua em $\overset{o}{K}$ e a proposição fica demonstrada.

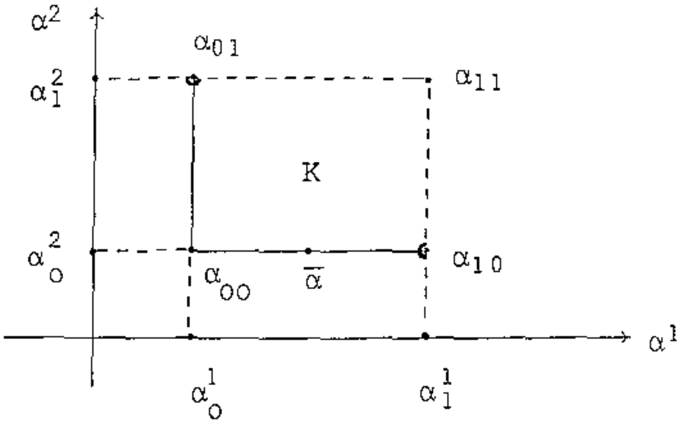
1.3.4. OBSERVAÇÃO. Consideremos agora uma escala normal incompleta com base M, isto é, um espaço vetorial M no qual uma família de normas $\|x\|_\alpha$, $(\alpha_{oo} \leq \alpha \leq \alpha_{11})$, é dada satisfazendo as desigualdades 1.3.1(1) e (2). A função $\varphi_x(\alpha) = \|x\|_\alpha$ $(x \in M)$ é contínua no quadrado pivoteado por α_{oo} e α_{11} exceto possivelmente na fronteira do quadrado. Vamos denotar por K este quadrado. Se $x = 0$ então $\varphi_x(\alpha) \equiv 0$ para todo α em K. Seja então $x \neq 0$. Provaremos que $\varphi_x(\alpha)$ é contínua em α_{oo}. Com efeito, como $\varphi(\alpha)$ é limitada e de 1.3.1(1) teremos

$$(1) \qquad \varphi(\alpha_{oo}) \leq \underline{\lim}_{\gamma \to \alpha_{oo}} \varphi(\gamma)$$

De 1.3.1(2) com $\beta_{oo} = \alpha_{oo}$ e $\beta_{11} = \alpha_{11}$ teremos

$$(2) \qquad \overline{\lim}_{\gamma \to \alpha_{oo}} \varphi(\gamma) \leq \varphi(\alpha_{oo})$$

Assim (1) e (2) implicam que a função $\varphi(\alpha)$ é contínua em α_{oo}. Ainda mais, provaremos que $\varphi(\alpha)$ é contínua em todos os pontos (α^1, α_o^2) e (α_o^1, α^2) com $\alpha^1 < \alpha_1^1$ e $\alpha^2 < \alpha_1^2$. Geometricamente, a função $\varphi(\alpha)$ é contínua em:



Com efeito, consideremos um ponto (α^1, α_o^2) que denotaremos por $\bar{\alpha}$.

Lembramos inicialmente que a definição 1.3.1 implica que os espaços $(E_\alpha,\ \alpha_{oo} \leq \alpha \leq \alpha_{11})$ formam escalas simples nos segmentos de K paralelos aos eixos coordenados. Portanto, nestes segmentos a função $\varphi_x(\alpha)$ é contínua, como função de uma variável, exceto possivelmente nos pontos finais destes segmentos.

Analogamente a (1) e (2) concluimos que $\varphi_x(\alpha)$ é "contínua" em $\bar{\alpha}$ para "semi-vizinhanças" da forma

$$V(\bar{\alpha}) = \{\alpha \in K \mid \alpha \geq \bar{\alpha}\}$$

ou, equivalentemente se $\{\alpha_n\} \to \bar{\alpha}$, $\alpha_n \geq \bar{\alpha}$, então $\varphi_x(\alpha_n) \to \varphi_x(\bar{\alpha})$. Então, de 1.3.1(1) temos que

(3) $$\overline{\lim_{\alpha \to \bar{\alpha}}}\ \varphi_x(\alpha) = \varphi_x(\bar{\alpha}).$$

Agora, como $\varphi_x(\alpha^1, \alpha_o^2)$ é contínua $(\alpha_o^1 \leq \alpha^1 < \alpha_1^1)$ e de 1.3.1(1) temos

$$(4) \qquad \lim_{\alpha \to \bar{\alpha}} \varphi_x(\alpha) = \varphi_x(\bar{\alpha}).$$

De (3) e (4) temos a continuidade desejada. De maneira análoga segue que $\varphi_x(\alpha^1,\alpha^2)$ é contínua nos pontos (α_o^1,α^2), $\alpha_o^2 < \alpha^2 < \alpha_1^2$.

1.3.5. DEFINIÇÃO. Uma escala normal $(E_\alpha,\ \alpha_{oo} \leq \alpha \leq \alpha_{11})$ relativa ao esqueleto $\mathbb{E} = (E_{\alpha_k},\ k \in \square)$ tal que a função $\varphi_x(\alpha) = \|x\|_{E_\alpha}$ $(x \in E_{\alpha_{11}})$ é contínua para todo α no quadrado pivoteado por α_{oo} e α_{11} é dita uma *escala normal contínua*.

Neste caso dizemos que a escala $(E_\alpha,\ \alpha_{oo} \leq \alpha \leq \alpha_{11})$ *conecta* a família $\mathbb{E} = (E_{\alpha_k},\ k \in \square)$.

1.3.6. EXEMPLO. Seja $P = (p_1,p_2)$ um par com $1 \leq p_i \leq \infty$, $i=1,2$. Uma função $f(x,y)$ mensurável no espaço produto $[0,1] \times [0,1]$ com a medida de Lebesgue pertence a $L^P([0,1] \times [0,1])$ se o número obtido tomando a p_1-norma em x e a p_2-norma em y, nesta ordem, é finito. O número assim obtido, finito ou não, será denotado por $\|f\|_P$ ou $\|f\|_{p_1p_2}$.

Quando $p_i < \infty$, $i = 1,2$, nós temos em particular:

$$\|f\|_P = \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 |f(x,y)|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right]^{1/p_2}.$$

Se, ainda mais, cada $p_i = p$:

$$\| f \|_P = [\int_0^1 | f(x,y) |^p \, dxdy]^{1/p} = \| f \|_p$$

e

$$L^P([0,1] \times [0,1]) = L^p([0,1] \times [0,1]).$$

As letras $P, Q, R, \ldots$ sempre designarão pares $P = (p_1, p_2)$, ... com componentes entre 1 e ∞. Também, se $p' = p/(p-1)$ é o valor complementar de p então $P' = P/(P-1)$ é o par cujas componentes são os valores complementares das componentes de P.

Aplicando sucessivamente a desigualdade de Minkowski teremos, para f e g em L^P:

$$\| f + g \|_P \leq \| f \|_P + \| g \|_P$$

isto é, L^P é um espaço normado. Ainda mais, L^P é um espaço de Banach.

Como estamos em espaços de medida unitária teremos, usando a desigualdade de Holder:

(i) Se $Q \geq P$ então $L^Q \subset L^P$ e $\| f \|_P \leq \| f \|_Q$ com imersão densa.

Com efeito:

$$\|f\|_{p_1p_2}^{p_2} = \int_0^1 [\int_0^1 |f(x,y)|^{p_1} dx]^{p_2/p_1} dy \leq$$

$$\leq \int_0^1 [\int_0^1 |f(x,y)|^{q_1} dx]^{p_2/q_1} dy \leq$$

$$\leq [\int_0^1 [\int_0^1 |f(x,y)|^{q_1} dx]^{q_2/q_1} dy]^{p_2/q_2}$$

e portanto $\|f\|_P \leq \|f\|_Q$ $(f \in L^Q)$.

Ainda mais, o conjunto das funções simples mensuráveis (combinação linear de funções características) é denso em qualquer espaço L^P e portanto L^Q é denso em L^P.

(ii) Se $f \in L^Q([0,1] \times [0,1])$ e $P \leq R \leq Q$ então

$$\|f\|_R = [\int_0^1 [\int_0^1 |f(x,y)|^{r_1} dx]^{r_2/r_1} dy]^{1/r_2} =$$

$$= [\int_0^1 [\int_0^1 |f(x,y)|^{r_1(q_1-r_1)/(q_1-p_1)} |f(x,y)|^{r_1(r_1-p_1)/(q_1-p_1)} dx]^{r_2/r_1} dy]^{1/r_2}$$

$$\leq [\int_0^1 [\int_0^1 |f(x,y)|^{p_1} dx]^{r_2(q_1-r_1)/p_1(q_1-p_1)} \times$$

$$\times [\int_0^1 |f(x,y)|^{q_1}]^{r_2(r_1-p_1)/q_1(q_1-p_1)}]^{1/r_2} \leq$$

$$\leq \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 |f(x,y)|^{p_1} dx\right]^{r_2/p_1} dy\right]^{(q_1-r_1)/r_2(q_1-p_1)} \times$$

$$\times \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 |f(x,y)|^{q_1} dx\right]^{r_2/q_1} dy\right]^{(r_1-p_1)/r_2(q_1-p_1)} =$$

$$= \left\{\int_0^1 \left[\left(\int_0^1 |f(x,y)|^{p_1} dx\right)^{1/p_1}\right]^{r_2(q_2-r_2)/(q_2-p_2)} \times\right.$$

$$\times \left.\left[\left(\int_0^1 |f(x,y)|^{p_1} dx\right)^{1/p_1}\right]^{r_2(r_2-p_2)/(q_2-p_2)} dy\right\}^{(q_1-r_1)/r_2(q_1-p_1)}$$

$$\times \left\{\int_0^1 \left[\left(\int_0^1 |f(x,y)|^{q_1} dx\right)^{1/q_1}\right]^{r_2(q_2-r_2)/(q_2-p_2)} \times\right.$$

$$\times \left.\left[\left(\int_0^1 |f(x,y)|^{q_1} dx\right)^{1/q_1}\right]^{r_2(r_2-p_2)/(q_2-p_2)} dy\right\}^{(r_1-p_1)/r_2(q_1-p_1)}$$

$$\leq \|f\|_{p_1p_2}^{(q_1-r_1)/(q_1-p_1) \times (q_2-r_2)/(q_2-p_2)} \times$$

$$\times \|f\|_{p_1q_2}^{(q_1-r_1)/(q_1-p_1) \times (r_2-p_2)/(q_2-p_2)} \times$$

$$\times \|f\|_{q_1p_2}^{(r_1-p_1)/(q_1-p_1) \times (q_2-r_2)/(q_2-p_2)} \times$$

$$\times \|f\|_{q_1q_2}^{(r_1-p_1)/(q_1-p_1) \times (r_2-p_2)/(q_2-p_2)}$$

e portanto temos que $(L^R,\ P \leq R \leq Q)$ é uma escala normal relativa ao esqueleto $\mathbb{E} = (L^{p_1p_2}, L^{p_1q_2}, L^{q_1p_2}, L^{q_1q_2})$. Ainda mais,

$$\lim_{(p_n,q_n)\to(p,q)} \|f\|_{p_nq_n} = \|f\|_{p,q}\ .$$

Com efeito, usando sucessivamente o resultado em um parâmetro teremos:

(1)

$$\big|\|f_y\|_{p_n} - \|f_y\|_p\big| \leq \varepsilon \Rightarrow \big\|\,\|f_y\|_{p_n} - \|f_y\|_p\,\big\|_{q_n} \leq \varepsilon \Rightarrow \big|\,\|f\|_{p_nq_n} - \|f\|_{pq_n}\big| \leq \varepsilon$$

De (1) teremos:

$$\|f\|_{p_nq_n} - (\|f\|_{pq} + \varepsilon) \leq \|f\|_{p_nq_n} - \|f\|_{pq_n} \leq \varepsilon$$

e portanto

(2) $$\|f\|_{p_nq_n} \leq \|f\|_{pq} + 2\varepsilon$$

Usando (1) novamente:

$$(\|f\|_{pq} - \varepsilon) - \|f\|_{p_nq_n} \leq \|f\|_{pq_n} - \|f\|_{p_nq_n} \leq \varepsilon$$

e portanto

$$(3) \qquad \|f\|_{p_n q_n} \geq \|f\|_{pq} - 2\varepsilon \quad .$$

De (2) e (3) temos que $\|f\|_{p_n q_n} \to \|f\|_{pq}$ quando $(p_n, q_n) \to$ $\to (p,q)$.

Assim $(L^R, P \leq R \leq Q)$ é uma escala normal contínua relativa ao esqueleto $\mathbb{E}$.

1.4. FAMÍLIA RELACIONADA

1.4.1. DEFINIÇÃO. Uma família $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ de espaços de Banach é dita relacionada se E_k está normalmente imerso em $E_{k'}$, para $k \geq k'$ e existe uma escala normal contínua conectando a família $\mathbb{E}$.

1.4.2. LEMA. Se $(E_\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1)$ é uma escala normal relativa ao esqueleto $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$. Então

$$\underline{\lim}_{\alpha \to (1,1)} \|x\|_{E_\alpha} \leq \|x\|_{E^{01}}, \qquad x \in E_{11}$$

onde E^{01} é o completamento de E_{11} relativo a E_{00}.

DEMONSTRAÇÃO. Pela definição da norma em E^{01} existe uma sequência $\{x_n\} \subset E_{11}$ tal que $\|x_n\|_{E_{11}} = \|x\|_{E^{01}}$ e x_n converge para x em E_{00}. Então temos:

$$\|x - x_n\|_{E_\alpha} \leq \|x - x_n\|_{E_{00}}^{(1-\alpha^1)(1-\alpha^2)} \|x - x_n\|_{E_{10}}^{\alpha^1(1-\alpha^2)} \times$$

$$\times \|x - x_n\|_{E_{01}}^{(1-\alpha^1)\alpha^2} \times \|x - x_n\|_{E_{11}}^{\alpha^1\alpha^2} \leq \|x - x_n\|_{E_{00}}^{(1-\alpha^1)(1-\alpha^2)} \times$$

$$\times (\|x\|_{E_{10}} + \|x_n\|_{E_{10}})^{\alpha^1(1-\alpha^2)} \times (\|x\|_{E_{01}} + \|x_n\|_{E_{01}})^{(1-\alpha^1)\alpha^2}$$

$$\times (\|x\|_{E_{11}} + \|x_n\|_{E_{11}})^{\alpha^1\alpha^1} \leq \|x - x_n\|_{E_{00}}^{(1-\alpha^1)(1-\alpha^2)} \times$$

$$\times (\|x\|_{E_{10}} + \|x\|_{E^{01}})^{\alpha^1(1-\alpha^2)} \times (\|x\|_{E_{01}} + \|x\|_{E^{01}})^{(1-\alpha^1)\alpha^2}$$

$$\times (\|x\|_{E_{11}} + \|x\|_{E^{01}})^{\alpha^1\alpha^2} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Em particular $\|x_n\|_{E_\alpha} \to \|x\|_{E_\alpha}$ $(n \to \infty)$. Agora, dado $\varepsilon > 0$ escolhemos α tal que $\|x\|_{E_\alpha} \geq \underline{\lim}_{\alpha \to 1} \|x\|_{E_\alpha} - \varepsilon$. Então, para n grande temos:

$$\|x\|_{E^{01}} = \|x_n\|_{E_{11}} \geq \|x_n\|_{E_\alpha} \geq \|x\|_{E_\alpha} - \varepsilon \geq \underline{\lim}_{\alpha \to 1} \|x\|_{E_\alpha} - 2\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário segue a tese.

1.4.3. OBSERVAÇÃO: Segue imediatamente das escalas simples que:

$$\underline{\lim}_{\alpha \to k} \|x\|_{E_\alpha} \leq \|x\|_{E^{0k}} \quad (x \in E_{11}), \qquad k \in \{(1,0),(0,1)\}$$

onde E^{Ok} é o completamento de E_k relativo a E_{oo}.

1.4.4. COROLÁRIO. Para $\beta < 1$ o espaço E_β está isometricamente imerso em seu completamento relativo a E_{oo}.

DEMONSTRAÇÃO. Para $x \in E_{11}$ a função $\|x\|_{E_\alpha}$ é contínua no ponto $\beta < 1$ e pelo lema temos:

$$\|x\|_{E^{o\beta}} \geq \varliminf_{\substack{\alpha \to \beta \\ \alpha \leq \beta}} \|x\|_{E_\alpha} = \|x\|_{E_\beta}$$

Como a desigualdade contrária vale sempre temos:

$$\|x\|_{E^{o\beta}} = \|x\|_{E_\beta} \qquad (x \in E_{11})$$

Como E_{11} é denso em E_β esta igualdade extende-se a todos os elementos de E_β.

1.4.5. TEOREMA. Seja $\mathbb{E} = (E_k\,, k \in \square)$ uma família de espaços de Banach tal que se $k \geq k'$ então E_k está normalmente imerso em $E_{k'}$. Para que a família $\mathbb{E}$ seja relacionada é condição necessária e suficiente que $E_k (k \in \square, (k \neq (0,0))$ seja isometricamente imerso em seu completamento relativo a E_{oo}.

CONDIÇÃO NECESSÁRIA. Se a família $\mathbb{E}$ é relacionada então existe uma escala normal contínua (E_α, $0 \leq \alpha \leq 1$) conectando esta família. Pelo Lema 1.4.2 temos:

$$\|x\|_{E_{11}} = \lim_{\alpha \to (1,1)} \|x\|_{E_\alpha} \leq \|x\|_{E^{01}}$$

Como a desigualdade contrária vale sempre temos que as normas dos espaços E_{11} e E^{01} coincidem sobre E_{11}. Para $k = (1,0)$ ou $(0,1)$ segue analogamente da observação 1.4.3.

CONDIÇÃO SUFICIENTE. No espaço vetorial E_{11} nós introduzimos uma família de normas pela fórmula:

(1)

$$\|x\|_{E_\alpha} = \sup_{f \in E'_{oo}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'_{oo}}^{(1-\alpha^1)(1-\alpha^2)} \|f\|_{E'_{10}}^{\alpha^1(1-\alpha^2)} \|f\|_{E'_{01}}^{(1-\alpha^1)\alpha^2} \|f\|_{E'_{11}}^{\alpha^1\alpha^2}}$$

$$= \sup_{f \in E'_{oo}} \frac{|f(x)|}{\prod_{k \in \square} \|f\|_{E'_k}^{\alpha(k)}}$$

onde

$$\alpha(k) = \prod_{j=1}^{2} [\,(1 - k_j) + (-1)^{1-k_j}\alpha^j\,].$$

A quantidade $\|x\|_{E_\alpha}$ tem todas as propriedades de uma norma. Ainda mais, para todo $x \in E_{11}$ e $f \in E'_{oo}$ a função $F_{x,f}(\alpha)$

definida no quadrado pivoteado por $(0,0)$ e $(1,1)$ dada por:

$$(2) \qquad F_{x,f}(\alpha) = \frac{|f(x)|}{\prod_{k\in\square} \|f\|_{E'_k}^{\alpha(k)}}$$

$$= \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'_{oo}}} \left(\frac{\|f\|_{E'_{oo}}}{\|f\|_{E'_{10}}}\right)^{\alpha^1(1-\alpha^2)} \left(\frac{\|f\|_{E'_{oo}}}{\|f\|_{E'_{01}}}\right)^{(1-\alpha^1)\alpha^2} \left(\frac{\|f\|_{E'_{oo}}}{\|f\|_{E'_{11}}}\right)^{\alpha^1\alpha^2}$$

é contínua neste quadrado. Como $\|f\|_{E'_k} \leq \|f\|_{E'_{k'}}$ para $k \geq k'$ e $f \in E'_{oo}$ a função (2) é também "não decrescente" em α. Com efeito, basta observar que

$$F_{x,f}(\alpha^1,\alpha^2) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'_{oo}}^{1-\alpha^2} \|f\|_{E'_{01}}^{\alpha^2}} \left[\left(\frac{\|f\|_{E'_{oo}}}{\|f\|_{E'_{10}}}\right)^{1-\alpha^2} \left(\frac{\|f\|_{E'_{01}}}{\|f\|_{E'_{11}}}\right)^{\alpha^2}\right]^{\alpha^1}$$

$$F_{x,f}(\alpha^1,\alpha^2) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'_{oo}}^{1-\alpha^1} \|f\|_{E'_{10}}^{\alpha^1}} \left[\left(\frac{\|f\|_{E'_{oo}}}{\|f\|_{E'_{01}}}\right)^{1-\alpha^1} \left(\frac{\|f\|_{E'_{10}}}{\|f\|_{E'_{11}}}\right)^{\alpha^1}\right]^{\alpha^2}$$

e portanto $F_{x,f}(\alpha^1,\alpha^2)$ é "crescente" em cada variável separadamente. Assim, se $\alpha \leq \beta$ temos:

(3) $$\|x\|_{E_\alpha} \leq \|x\|_{E_\beta}$$

Ainda mais, se $(0,0) \leq \alpha_o < \gamma < \alpha_1 \leq (1,1)$ teremos:

$$(1 - \gamma^1)\gamma^2 = (1 - \alpha_o^1)(u_o^1 u_o^2 \alpha_o^2 + u_o^1 u_1^2 \alpha_1^2) +$$

$$+ (1 - \alpha_1^1)(u_1^1 u_o^2 \alpha_o^2 + u_1^1 u_1^2 \alpha_1^2)$$

$$\gamma^1(1 - \gamma^2) = (1 - \alpha_o^2)(u_o^1 u_o^2 \alpha_o^1 + u_1^1 u_o^2 \alpha_1^1) +$$

$$+ (1 - \alpha_1^1)(u_o^1 u_1^2 \alpha_o^1 + u_1^1 u_1^2 \alpha_1^1)$$

$$\gamma^1\gamma^2 = \alpha_o^1(u_o^1 u_o^2 \alpha_o^2 + u_o^1 u_1^2 \alpha_1^2) + \alpha_1^1(u_1^1 u_o^2 \alpha_o^2 + u_1^1 u_1^2 \alpha_1^2)$$

onde

$$u_o^j = \frac{\alpha_1^j - \gamma^j}{\alpha_1^j - \alpha_o^j} \quad , \quad u_1^j = \frac{\gamma^j - \alpha_o^j}{\alpha_1^j - \alpha_o^j} \qquad j = 1,2$$

e

$$u_o^j + u_1^j = 1, \quad u_o^j \alpha_o^j + u_1^j \alpha_1^j = \gamma^j, \quad j = 1,2.$$

Das igualdades precedentes segue imediatamente:

$$F_{x,f}(\gamma) = [F_{x,f}(\alpha_{oo})]^{u_o^1 u_o^2} [F_{x,f}(\alpha_{10})]^{u_1^1 u_o^2} [F_{x,f}(\alpha_{01})]^{u_o^1 u_1^2} [F_{x,f}(\alpha_{11})]^{u_1^1 u_1^2}$$

e portanto, tomando o supremo quando $f \in E'_{oo}$ teremos

$$(4) \qquad \|x\|_{E_\gamma} \leq \|x\|_{E_{\alpha_{oo}}}^{u_o^1 u_o^2} \|x\|_{E_{\alpha_{10}}}^{u_1^1 u_o^2} \|x\|_{E_{\alpha_{01}}}^{u_o^1 u_1^2} \|x\|_{E_{\alpha_{11}}}^{u_1^1 u_1^2} \qquad (x \in E_{11})\,.$$

Assim, o conjunto E_{11} no qual uma família de normas $\|x\|_{E_\alpha}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ é dada satisfazendo as desigualdades (3) e (4) nos fornece uma escala normal incompleta contínua de espaços com base E_{11}. As desigualdades (3) e (4) implicam que a condição π) da proposição 1.2.4, é satisfeita e portanto os espaços obtidos completando o conjunto E_{11} nas normas $\|x\|_{E_\alpha}$ formam uma escala normal contínua. Com efeito, seja $(x_n) \subset E_{11}$ uma sequência de Cauchy na norma de E_γ e $\|x_n\|_{E_{oo}} \to 0$ quando $n \to \infty$. Então de (4) teremos, para $0 \leq \beta < \gamma$, que

$$\|x_n\|_{E_\beta} \leq \|x_n\|_{E_{oo}}^{u_o^1 u_o^2} \|x_n\|_{E_{\gamma^1 0}}^{u_1^1 u_o^2} \|x_n\|_{E_{0\gamma^2}}^{u_o^1 u_1^2} \|x_n\|_{E_{\gamma^1\gamma^2}}^{u_1^1 u_1^2}$$

Como as três últimas parcelas do segundo membro da desigualdade são limitadas temos que:

$$(5) \qquad \|x_n\|_{E_\beta} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty \quad \text{para} \quad 0 \leq \beta < \gamma.$$

A sequência $(\varphi_n(\beta)) = (\|x_n\|_{E_\beta})$ de funções contínuas de β converge uniformemente no quadrado pivoteado por 0 e γ pois:

$$\left| \|x_n\|_\beta - \|x_m\|_\beta \right| \leq \|x_n - x_m\|_\beta \leq \|x_n - x_m\|_\gamma \to 0 \text{ quando } n, m \to \infty.$$

Assim,

$$\|\varphi_n - \varphi_m\| = \sup_{\beta \in \square} |\varphi_n(\beta) - \varphi_m(\beta)| \to 0 \qquad \text{quando} \qquad m, n \to \infty.$$

Então a função limite $\varphi(\beta)$ é contínua no quadrado pivoteado por 0 e γ e de (5) temos que $\varphi(\beta) = 0$, $0 \leq \beta < \gamma$. Então $\varphi(\gamma) = 0$ e $\lim_{n \to \infty} \|x_n\|_{E_\gamma} = 0$. Ainda mais, de (3), (4) e da observação 1.3.4 temos que a função $\varphi_x(\alpha) = \|x\|_{E_\alpha}$ é contínua no quadrado pivoteado por $(0,0)$ e $(1,1)$ exceto possivelmente nos pontos $(1,\alpha^2)$ e $(\alpha^1,1)$, $0 \leq \alpha^1, \alpha^2 \leq 1$, pontos estes que chamaremos de $\bar{\alpha}$.

Como o supremo de funções contínuas é uma função semi-contínua inferiormente temos que:

$$\underline{\lim}_{\alpha \to \bar{\alpha}} \varphi_x(\alpha) \geq \varphi_x(\bar{\alpha}).$$

Como nos lados do quadrado temos escalas simples e usando (3) teremos:

$$\overline{\lim}_{\alpha \to \bar{\alpha}} \varphi_x(\alpha) = \varphi_x(\bar{\alpha}).$$

Assim $\varphi_x(\alpha)$ é contínua no quadrado pivoteado por 0 e 1.

Ainda mais, para $\alpha = (0,0)$ temos

$$\|x\|_{E_{\alpha=(0,0)}} = \sup_{f\in E'_{oo}} |f(x)| / \|f\|_{E'_{oo}} = \|x\|_{E_{oo}} .$$

e como E_{11} é denso em E_{oo} na norma de E_{oo} o completamento de E_{11} na norma $\|x\|_{E_{\alpha=(0,0)}}$ coincide com E_{oo}.

Também, para $\alpha = (1,0)$ temos

$$\|x\|_{E_{\alpha=(1,0)}} = \sup_{f\in E'_{oo}} (|f(x)|)/\|f\|_{E'_{10}}$$

e como E_{10} está isometricamente imerso em seu completamento relativo a E_{oo} teremos pelo teorema 0.3.5, que:

$$\|x\|_{E_{\alpha=(1,0)}} = \|x\|_{E_{10}}.$$

Analogamente

$$\|x\|_{E_{\alpha=(0,1)}} = \|x\|_{E_{01}} ; \quad \|x\|_{E_{\alpha=(1,1)}} = \|x\|_{E_{11}}.$$

Como E_{11} é denso em E_k, $k \in \square$, na norma de E_k, o completamento de E_{11} na norma $\|x\|_{E_{\alpha=k}}$ coincide com o espaço E_k, $k \in \square$.

Então a família $\mathbb{E}$ é relacionada, isto é, o completamento de E_{11} nas normas (1) nos dá uma escala normal contínua $(E_\alpha, 0 \le \alpha \le 1)$ conectando esta família.

Pelo Teorema 0.3.5 as hipóteses do Teorema 1.4.5, admite várias formulações equivalentes:

1.4.6. TEOREMA. Seja a família $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ tal que se $k \geq k'$ então E_k está normalmente imerso em $E_{k'}$. Para que $\mathbb{E}$ seja relacionada é necessário e suficiente que as seguintes condições equivalentes sejam satisfeitas:

(i) As hipóteses do Teorema 1.4.5.

(ii) O espaço E'_{oo} é normativo em E'_k, $k \in \square$, $k \neq (0,0)$.

(iii) A bola de E_k ($k \in \square$, $k \neq (0,0)$) é fechada (em E_k) na topologia induzida pela norma de E_{oo}.

Pelo Lema 0.2.3, teremos os seguintes Corolários:

COROLÁRIO 1. Seja $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ uma família tal que se $k \geq k'$ então E_k está normalmente imerso em $E_{k'}$. Então a família $\overline{\mathbb{E}} = (E^{Ok}, k \in \square)$, onde E^{Ok} é o completamento relativo de E_k em E_{oo}, é relacionada.

COROLÁRIO 2. Seja $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ uma família tal que se $k \geq k'$ então E_k está normalmente imerso em $E_{k'}$.

Se E_k é completo em relação a E_{oo} ($k \in \square$) então a família $\mathbb{E}$ é relacionada. Em particular, se E_k, $k \neq (0,0)$ é reflexivo então a família $\mathbb{E}$ é relacionada.

O Teorema 0.3.8. nos conduz a:

COROLÁRIO 3. Seja $\mathbb{E} = (E_k , k \in \square)$ uma família tal que se $k \geq k'$ então E_k está normalmente imerso em $E_{k'}$.

Se E'_{oo} está densamente imerso em E'_k $(k \in \square)$ então a família $\mathbb{E}$ é relacionada.

O Teorema 0.3.6, implica o seguinte corolário:

COROLÁRIO 4. Sob as hipóteses do Corolário 3 a família $\mathbb{E}' = (E'_k , k \in \square)$ é relacionada.

1.5. CONDENSAÇÃO DE ESCALAS NORMAIS POR MEIO DE COMPLETAMENTO RELATIVO

Seja uma escala normal de espaços de Banach $\{E_\alpha , 0 \leq \alpha \leq 1\}$ relativa ao esqueleto $\mathbb{E} = \{E_k | k \in \square\}$.

Construiremos uma família de espaços $E^{o\alpha}$ que são os completamento de E_α relativo a E_o, $E^{o\alpha} \subset E_o$, e veremos as propriedades desta família.

1.5.1. PROPOSIÇÃO. Para $\alpha < \gamma$ o espaço $E^{o\gamma} \subset E^{o\alpha}$ com constante de imersão 1.

Seja $x \in E^{o\gamma}$, então existe uma sequência $\{x_n\} \subset E_\gamma$, $x_n \to x$

em E_o e $\|x_n\|_{E_\gamma} = \|x\|_{E^{o\gamma}}$.

Então $\|x_n\|_{E_\alpha} \leq \|x_n\|_{E_\gamma} = \|x\|_{E^{o\gamma}}$ o que implica que $x \in E^{o\alpha}$ e $\|x\|_{E^{o\alpha}} \leq \|x\|_{E^{o\gamma}}$.

1.5.2. PROPOSIÇÃO. O completamento $E^{\alpha\gamma}$ de E_γ relativo a E_α $(\alpha < \gamma)$ coincide com $E^{o\gamma}$.

Temos que $E_\gamma \subset E_\alpha \subset E_o$.

Seja $x \in E^{\alpha\gamma}$. Então existe uma sequência $\{x_n\} \subset E_\gamma$ com $x_n \to x$ em E_α e $\|x_n\|_{E_\gamma} = \|x\|_{E^{\alpha\gamma}}$. Pela imersão $E_\alpha \subset E_o$ a seqüência $\{x_n\}$ converge para x em E_o e portanto $x \in E^{o\gamma}$ e $\|x\|_{E^{o\gamma}} \leq \|x\|_{E^{\alpha\gamma}}$.

Inversamente, se $x \in E^{o\gamma}$ existe uma seqüência $\{x_n\} \subset E_\gamma$ com $x_n \to x$ em E_o e $\|x_n\|_{E_\gamma} = \|x\|_{E^{o\gamma}}$.

Como $\{E_\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ é uma escala normal temos para $0 < \alpha < \gamma$ que:

$$\|x_n - x_m\|_{E_\alpha} \leq \|x_n - x_m\|_{E_{oo}}^{(1-\alpha^1/\gamma^1)(1-\alpha^2/\gamma^2)} \|x_n - x_m\|_{E_{o\gamma^2}}^{(1-\alpha^1/\gamma^1)(\alpha^2/\gamma^2)} \times$$

$$\times \|x_n - x_m\|_{E_{\gamma^1 o}}^{(\alpha^1/\gamma^1)(1-\alpha^2/\gamma^2)} \|x_n - x_m\|_{E_{\gamma^1\gamma^2}}^{(\alpha^1/\gamma^1)(\alpha^2/\gamma^2)} \leq$$

$$\leq \|x_n - x_m\|_{E_{oo}}^{(1-\alpha^1/\gamma^1)(1-\alpha^2/\gamma^2)} \times$$

$$\times \|x_n - x_m\|_{E_{\gamma^1\gamma^2}}^{(1-\alpha^1/\gamma^1)(\alpha^2/\gamma^2)+(\alpha^1/\gamma^1)(1-\alpha^2/\gamma^2)+(\alpha^1/\gamma^1)(\alpha^2/\gamma^2)} \leq$$

$$\leq \|x_n - x_m\|_{E_{oo}}^{(1-\alpha^1/\gamma^1)(1-\alpha^2/\gamma^2)} \times$$

$$\times \quad (2\,\|x\|_{E^{o\gamma}})^{(1-\alpha^1/\gamma^1)(\alpha^2/\gamma^2)+(\alpha^1/\gamma^1)(1-\alpha^2/\gamma^2)+(\alpha^1/\gamma^1)(\alpha^2/\gamma^2)}$$

Como $\{x_n\}$ converge para x em E_{oo} então pela desigualdade acima $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em E_α e como $E_\alpha \subset E_{oo}$ ela converge para o mesmo elemento x em E_α. Assim, $x \in E^{\alpha\gamma}$ e $\|x\|_{E^{\alpha\gamma}} \leq \|x\|_{E^{o\gamma}}$. A desigualdade inversa mostrada anteriormente implica que os espaços $E^{\alpha\gamma}$ e $E^{o\gamma}$ coincidem isometricamente.

A Proposição 1.5.2, e o Lema 0.2.2, implicam:

1.5.3. PROPOSIÇÃO. Se $\gamma > \alpha$ e $E_\gamma \subsetneq E_\alpha$ então o espaço $E^{o\gamma}$ está imerso em E_α e não coincidem com ele.

1.5.4. PROPOSIÇÃO. Se o espaço E_α não é completo relativamente a E_{oo}, isto é, $E^{o\alpha} \neq E_\alpha$, então os espaços $E^{o\gamma}$ estão imersos, não densamente, em $E^{o\alpha}$ para $\alpha < \gamma$.

Com efeito, para $0 \leq \alpha < 1$ o Corolário 1.4.4, implica que E_α está isometricamente imerso em seu completamento relativo a

E_{oo} e como E_α não é completo relativamente a E_{oo} então E_α é um subespaço próprio de $E^{o\alpha}$.

Por outro lado, para $\alpha < \gamma$ temos $E^{o\gamma} \subset E_\alpha$ e consequentemente $E^{o\gamma}$ está imerso não densamente em $E^{o\alpha}$.

1.5.5. PROPOSIÇÃO. Para $0 \leq \beta_o \leq \gamma \leq \beta_1 < 1$ $(\beta_{oo} < \beta_{11})$ temos ainda

$$\|x\|_{E^{o\gamma}} \leq \|x\|_{E^{o\beta_{oo}}}^{u_1 u_2} \|x\|_{E^{o\beta_{01}}}^{u_1(1-u_2)} \|x\|_{E^{o\beta_{10}}}^{(1-u_1)u_2} \|x\|_{E^{o\beta_{11}}}^{(1-u_1)(1-u_2)}$$

$$(x \in E_{\beta_{11}})$$

onde $u_j = (\beta_1^j - \gamma^j)/(\beta_1^j - \beta_o^j)$ $j = 1,2$.

Convém lembrar que $E^{o\beta_k}$ é o completamento de E_{β_k} relativo a E_{oo}, $k \in \square$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in E^{o\beta_{11}}$. Então existe uma sequência $\{x_n\} \subset E_{\beta_{11}}$ tal que $x_n \to x$ em E_{oo} e $\|x_n\|_{E_{\beta_{11}}} \leq \|x\|_{E^{o\beta_{11}}}$. Como $\{E_\alpha\}$ é uma escala normal temos:

$$(1) \quad \|x_n\|_{E_\gamma} \leq \|x_n\|_{E_{\beta_{00}}}^{u_1 u_2} \|x_n\|_{E_{\beta_{01}}}^{u_1(1-u_2)} \|x_n\|_{E_{\beta_{10}}}^{(1-u_1)u_2} \|x_n\|_{E_{\beta_{11}}}^{(1-u_1)(1-u_2)}$$

$$= \|x_n\|_{E_{\beta_{00}}}^{u_1 u_2} \|x_n\|_{E_{\beta_{01}}}^{u_1(1-u_2)} \|x_n\|_{E_{\beta_{10}}}^{(1-u_1)u_2} \|x\|_{E^{o\beta_{11}}}^{(1-u_1)(1-u_2)}.$$

Na demonstração da proposição 1.5.2, mostramos que $x_n \to x$ em $E_{\beta_{00}}$. Agora, pelo Corolário 1.4.4, temos que $E_{\beta_{00}}$ está imerso isometricamente em $E^{o\beta_{00}}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ e n suficientemente grande temos $\|x_n\|_{E_{\beta_{00}}} \leq \|x\|_{E^{o\beta_{00}}} + \varepsilon$. Analogamente, para $\beta_{11} < 1$, temos:

$$\|x_n\|_{E_{\beta_{01}}} \leq \|x\|_{E^{o\beta_{01}}} + \varepsilon; \quad \|x_n\|_{E_{\beta_{10}}} \leq \|x\|_{E^{o\beta_{10}}} + \varepsilon \qquad (n > N)$$

Substituindo em (1) obtemos:

$$\|x\|_{E^{o\gamma}} \leq \Big[\prod_{\substack{k \in \square \\ k \neq (1,1)}} (\|x\|_{E^{o\beta_k}} + \varepsilon)^{u(k)} \Big] \|x\|_{E^{o\beta_{11}}}^{(1-u_1)(1-u_2)} .$$

Como ε é arbitrário segue a tese.

Então a família de espaços de Banach $E^{o\alpha}$ tem todas as propriedades de uma escala normal $(E^{o\alpha}, \alpha_o \leq \alpha \leq \alpha_1)(0 \leq \alpha_o < \alpha_1 < 1)$ exceto que as imersões não são densas.

1.6. ESCALAS NORMAL MAXIMAL E MINIMAL

1.6.1. ESCALA NORMAL MAXIMAL DE ESPAÇOS DE BANACH

Seja $\mathbb{F} = (F_k, k \in \square)$ uma família de espaços de Banach tal que se $k \geq k'$ então F_k está normalmente imerso em $F_{k'}$.

Consideremos agora todas as escalas normais contínuas incompletas $(E_\alpha, (0,0) \leq \alpha \leq (1,1))$ com base F_{11} tal que

(1) $$\|x\|_{E_k} \leq \|x\|_{F_k}, \quad k \in \square, \quad x \in F_{11}.$$

Notemos que existe uma tal escala, a escala trivial, assim definida

$$\|x\|_{E_\alpha} = \|x\|_{F_{00}} \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

ou seja $(E_\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1) = (F_{11}, \|x\|_{F_{00}})$.

Em F_{11} nós introduzimos uma família de normas $\|x\|_\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, pela fórmula:

(2) $$\|x\|_\alpha = \sup \|x\|_{E_\alpha} \qquad (x \in F_{11})$$

onde o supremo é tomado sobre todas as escalas com a propriedade acima.

Para uma escala fixa E_α e fixado x em F_{11} a função $\varphi_x(\alpha) = \|x\|_{E_\alpha}$ satisfaz 1.3.1(2), é crescente e contínua em α, $(0,0) \leq \alpha \leq (1,1)$.

A coleção de tais funções é uniformemente limitada para x fixo:

(3) $\qquad \varphi_x(\alpha) = \|x\|_{E_\alpha} \leq \|x\|_{E_{11}} \leq \|x\|_{F_{11}}$.

Então $\|x\|_\alpha = \sup \|x\|_{E_\alpha}$ para esta coleção de funções satisfaz 1.3.1(2), é crescente e contínua em α, $0 \leq \alpha \leq 1$.

O completamento do espaço F_{11} nas normas $\|x\|_\alpha$ nos dá uma escala normal contínua de espaços E_α^{max}, $0 \leq \alpha \leq 1$, relativa ao esqueleto $(E_k^{max}, k \in \square)$. Como $\|x\|_{E_o} \leq \|x\|_{F_o}$ $(x \in F_{11})$, de (2) e da escala trivial segue que $\|x\|_o = \|x\|_{F_o}$ e consequentemente os espaços E_o^{max} e F_o coincidem.

Temos então

$$\begin{tikzcd}
 & & E_{01}^{max} \arrow[dr, hook] & & \\
F_{11} \arrow[r, hook] & E_{11}^{max} \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & E_\alpha \arrow[r, hook] & E_{00}^{max} = F_{00} \\
 & & E_{10}^{max} \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

onde $\hookrightarrow$ significa normalmente imerso.

A escala então obtida é chamada *escala normal maximal* construida da família $\mathbb{F} = (F_k, k \in \square)$ e tem as propriedades:

a) $\quad E_{oo}^{max} = F_{oo}$

b) $\quad F_k$ está normalmente imerso em E_k^{max}, $k \in \square$.

c) Se para alguma escala contínua $(E_\alpha,\ 0 \le \alpha \le 1)$ relativa ao esqueleto $\mathbb{E} = (E_k\ , k \in \square)$ as desigualdades (1) valem então

$$(4) \qquad \|x\|_{E_\alpha} \le \|x\|_{E_\alpha^{max}}, \quad 0 \le \alpha \le 1 \quad (x \in F_{11}).$$

Da propriedade c) segue que a escala normal maximal é definida de maneira única.

Se a família $\mathbb{F} = (F_k\ , k \in \square)$ é relacionada então a escala normal maximal conecta esta família pois neste caso $\|x\|_k = \|x\|_{F_k}$ $(x \in F_{11})$, $k \in \square$, e portanto $E_k^{max} = F_k$.

O lema seguinte é mais geral.

1.6.2. LEMA. O espaço E_k^{max} coincide com o fecho de F_{11} em F^{ok}, onde F^{ok} é o completamento de F_k relativo a F_{oo}.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Corolário 1 do Teorema 1.4.6, a família $\mathbb{F}^o = (F^{ok}, k \in \square)$ é relacionada. Se F_α é a escala normal contínua conectando esta família e como

$$\|x\|_{F^{ok}} \le \|x\|_{F_k}, \qquad k \in \square \qquad (x \in F_{11})$$

então as propriedades 1.6.1(1) são satisfeitas para a família F_α. Então de 1.6.1(4) teremos:

(1) $$\|x\|_{F^{ok}} \leq \|x\|_{E_k^{max}}, \qquad k \in \square \qquad (x \in F_{11}).$$

Considerando agora a escala E_α^{max} teremos

$$\|x\|_{E_k^{max}} \leq \|x\|_{F_k}, \quad k \in \square, \quad x \in F_{11} \quad e \quad E_{oo}^{max} = F_{oo}.$$

Também, para todo x em F_k existe uma sequência $\{x_n\} \subset F_k$, $x_n \to x$ em F_{oo} e $\|x_n\|_{F_k} = \|x\|_{F^{ok}}$. Então

$$\|x_n\|_{E_k^{max}} \leq \|x_n\|_{F_k} = \|x\|_{F^{ok}}.$$

Como $x_n \to x$ em E_{oo}^{max} temos

(2) $$\|x\|_{E^{ok}} \leq \|x\|_{F^{ok}} \qquad x \in F_k, \quad k \in \square,$$

onde E^{ok} é o completamento de E_k^{max} relativo e E_{oo}^{max}. Como a família E_k^{max} é relacionada então pelo Teorema 1.4.5, e de (2) teremos:

$$\|x\|_{E_k^{max}} = \|x\|_{E^{ok}} \leq \|x\|_{F^{ok}}, \quad k \in \square, \quad x \in F_{11}.$$

Usando (1) temos então:

$$\|x\|_{E_k^{max}} = \|x\|_{F^{ok}}, \quad k \in \square, \quad x \in F_{11}$$

e o lema fica demonstrado.

1.6.3. LEMA. Seja $\mathbb{F} = (F_k, k \in \square)$ uma família de espaços de Banach tal que se $k \geq k'$ então F_k está normalmente imerso em $F_{k'}$. Seja ainda um funcional $H(x,\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $x \in F_{11}$, que é uma seminorma para α fixo, satisfaz 1.3.1(2) e é contínua em α para x fixo e $H(x,\alpha) \not\equiv 0$. Se

$$H(x,k) \leq \|x\|_{F_k}, \qquad k \in \square$$

então

$$H(x,\alpha) \leq \|x\|_{E_\alpha^{max}} \qquad 0 \leq \alpha \leq 1, \qquad x \in F_{11}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Definimos o funcional

$$G(x,\alpha) = \sup_{\alpha_1 \leq \alpha} H(x,\alpha_1) \quad \text{e} \quad G(x,0) = H(x,0).$$

Este funcional é também uma seminorma para α fixo, satifaz 1.3.1(2) e é uma função contínua e crescente de α para x fixo, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Ainda mais

$$G(x,k) \leq \|x\|_{F_k}, \qquad k \in \square.$$

Temos então uma escala normal incompleta contínua de base F_{11} com norma

$$\|x\|_\alpha = \max\{G(x,\alpha),\ \|x\|_{E_\alpha^{max}}\}.$$

Esta escala satisfaz 1.6.1(1) e consequentemente 1.6.1(4) vale para ela. Portanto $H(x,\alpha) \leq \|x\|_{E_\alpha^{max}}$ $(x \in F_{11})$.

1.6.4. TEOREMA. A escala normal maximal E_α^{max}, $0 \leq \alpha \leq 1$, construida dos espaços F_k, $k \in \square$, é a escala maximal construida dos espaços $E_{\alpha_k}^{max}$ sobre todo quadrado interior pivoteado por α_{oo} e α_{11}.

DEMONSTRAÇÃO. Seja H_α a escala maximal construida dos espaços $E_{\alpha_k}^{max}$, $\alpha_{oo} \leq \alpha \leq \alpha_{11}$. Então

(1) $$\|x\|_{E_\alpha^{max}} \leq \|x\|_{H_\alpha} \qquad x \in E_{\alpha_{11}}^{max}, \qquad \alpha_{oo} \leq \alpha \leq \alpha_{11}$$

e

$$\|x\|_{E_\alpha^{max}} = \|x\|_{H_\alpha} \qquad \text{para} \qquad \alpha = \alpha_k, \qquad k \in \square,$$

pois a família $\overline{\mathbb{E}} = (E_{\alpha_k}^{max}, k \in \square)$, é relacionada.

Definimos agora a família E_α, $0 \leq \alpha \leq 1$ assim: $E_\alpha = E_\alpha^{max}$ para α não pertencente ao quadrado pivoteado por α_{oo} e α_{11} e $E_\alpha = \mathbb{E}_\alpha$ para $\alpha_o \leq \alpha \leq \alpha_{11}$.

Pelo que vimos em 1.2, os espaços E_α, $0 \leq \alpha \leq 1$, formam uma escala normal. Ainda mais, esta escala é contínua, tem as propriedades 1.6.1(1) e portanto 1.6.1(4) vale para ela. Em nosso caso, para $\alpha_{00} \leq \alpha \leq \alpha_{11}$ a desigualdade 1.6.1(4) é

$$(2) \qquad \|x\|_{H_\alpha} \leq \|x\|_{E_\alpha^{max}} \qquad (x \in F_{11}).$$

Como $F_{11} \subset E_{11}^{max} \subset E_{\alpha_{11}}^{max}$ de (1) e (2) segue que $\|x\|_{H_\alpha} = \|x\|_{E_\alpha^{max}}$, $x \in F_{11}$, $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_{11}$.

Como o espaço F_{11} é densamente imerso em ambos E_α^{max} e H_α então $H_\alpha = E_\alpha^{max}$.

1.7. ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO E PARES DE INTERPOLAÇÃO

Sejam $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ e $\mathbb{F} = (F_k, k \in \square)$ duas famílias de espaços de Banach imersas, algébrica e topologicamente, nos espaços de Hausdorff V e W respectivamente. No que segue as famílias $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ sempre satisfazem esta condição.

1.7.1. DEFINIÇÃO. Uma transformação linear

$$T : \sum_{k \in \square} E_k \to \sum_{k \in \square} F_k$$

é um operador limitado da família $\mathbb{E}$ na família $\mathbb{F}$ se a restrição T/E_k é um operador limitado de E_k em F_k, $k \in \square$.

Nós denotamos por $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ o espaço vetorial de todos os operadores limitados da família $\mathbb{E}$ na família $\mathbb{F}$. Este espaço é um espaço de Banach na norma.

$$\|T\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{F})} = \max_{k\in\square} \{ \|T\|_{E_k \to F_k} \}.$$

Com efeito seja $\{T_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L(\mathbb{E},\mathbb{F})$. Então suas restrições a E_k, $k \in \square$, convergem em $L(E_k, F_k)$ para operadores T_k os quais coincidem em $\cap E_k$ pois, se $x \in \cap E_k$ então $T_n(x) \to T_k(x)$ em F_k e $F_k \subset W$, $k \in \square$.

Então a sequência $\{T_n\}$ converge em $L(\mathbb{E},\mathbb{F})$ para um operador T definido (de maneira única) pela fórmula:

$$T(x) = \sum_{k\in\square} T_k(e_k)$$

onde

$$x = \sum_{k\in\square} e_k, \quad e_k \in E_k.$$

1.7.2. LEMA. Um operador limitado $T \in L(\mathbb{E},\mathbb{F})$ gera um operador limitado de ΣE_k em ΣF_k e de $\cap E_k$ em $\cap F_k$. Ainda mais

(1) $$\|T\|_{\Sigma E_k \to \Sigma F_k} \leq \|T\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{F})}$$

(2) $$\|T\|_{\cap E_k \to \cap F_k} \leq \|T\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{F})}$$

DEMONSTRAÇÃO. Para $x \in \sum_{k\in\square} E_k$ e pela definição da norma na soma de espaços de Banach temos

$$\|T(x)\|_{\Sigma F_k} \leq \inf_{x=\Sigma e_k} \left(\sum_{k\in\square} \|T(e_k)\|_{F_k} \right)$$

$$\leq \inf_{x=\Sigma e_k} \left(\sum_{k\in\square} \|T\|_{E_k \to F_k} \|e_k\|_{E_k} \right)$$

$$\leq \|T\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{F})} \|x\|_{\Sigma E_k}$$ o que implica (1).

Se $x \in \cap E_k$ então

$$\|T(x)\|_{\cap F_k} = \max_{k\in\square} \left(\|T(x)\|_{F_k} \right) \leq \max_{k\in\square} \left(\|T\|_{E_k \to F_k} \|x\|_{E_k} \right)$$

$$\leq \|T\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{F})} \|x\|_{\cap E_k}$$ o que implica (2).

1.7.3. LEMA. Sejam G e H espaços de Banach e E e F espaços de Banach imersos em G e H respectivamente. Se um operador limitado T de G em H leva E em F então a restrição de T a E é um operador limitado de E em F.

DEMONSTRAÇÃO. Basta mostrar que a restrição de T e E é um operador fechado.

Seja $x_n \to x$ em E e $T(x_n) \to y$ em F. Então $x_n \to x$ em G e $T(x_n) \to y$ em H. Logo $T(x) = y$. Assim o operador T é fechado e portanto limitado.

1.7.4. COROLÁRIO. Sejam $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ e $\mathbb{F} = (F_k, k \in \square)$ duas famílias de espaços de Banach. Se um operador limitado de $\sum\limits_{k\in\square} E_k$ em $\sum\limits_{k\in\square} F_k$ leva E_k em F_k, $k \in \square$, então este operador é limitado da família $\mathbb{E}$ na família $\mathbb{F}$.

1.7.5. DEFINIÇÃO. Sejam $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ e $\mathbb{F} = (F_k, k \in \square)$ duas famílias de espaços de Banach e G e H espaços intermediários entre as famílias $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ respectivamente, ou seja

$$\cap\, \mathbb{E} \subset G \subset \Sigma\, \mathbb{E} \quad \text{e} \quad \cap\, \mathbb{F} \subset H \subset \Sigma\, \mathbb{F},$$

onde o simbolo $\subset$ significa algébrica e continuamente imerso. O par (G,H) é chamado *par de interpolação* relativo a $(\mathbb{E},\mathbb{F})$ se todo operador limitado de $\mathbb{E}$ em $\mathbb{F}$ leva G em H.

Segue dos Lemas (1.7.2) e (1.7.3) que nas condições acima todo operador $T \in L(\mathbb{E},\mathbb{F})$ é um operador limitado de G em H.

1.7.6. LEMA. Se o par (G,H) é um par de interpolação relativo a $(\mathbb{E},\mathbb{F})$ então existe uma constante $c > 0$ (constante de interpolação) tal que:

(1) $\|T\|_{G\to H} \leq C \|T\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{F})}$ para todo $T \in L(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

DEMONSTRAÇÃO. Para todo operador $T \in L(\mathbb{E},\mathbb{F})$ nós tomamos sua restrição ao espaço G e definimos uma transformação linear ϕ tal que

$$\phi : L(\mathbb{E},\mathbb{F}) \to L(G,H)$$

$$T \mapsto T/G.$$

Como vimos acima $\phi(T)$ é um operador limitado de G em H. Vamos provar que a transformação ϕ é fechada. Com efeito, seja $T_n \to T$ em $L(\mathbb{E},\mathbb{F})$ e $\phi(T_n) \to S$ em $L(G,H)$. Do Lema 1.7.2, segue que $T_n x \to T(x)$ em $\sum_{k\in\square} F_k$, $x \in \sum_{k\in\square} E_k$ e, em particular, para $x \in G$.

Como $\phi(T_n) \to S$ temos que $T_n x \to Sx$ em H $(x \in G)$. Da imersão $H \subset \sum_{k\in\square} F_k$ nós temos $Tx = Sx$ $(x \in G)$, isto é, $\phi(T) = T/G = S$. Como ϕ é fechada então ela é limitada e (1) vale.

1.7.7. LEMA. Se o par (G,H) é um par de interpolação relativo a $(\mathbb{E},\mathbb{F})$ e $\tilde{G}$ e $\tilde{H}$ denota o completamento de G e H relativo a $\sum_{k\in\square} E_k$ e $\sum_{k\in\square} F_k$ respectivamente então o par $(\tilde{G},\tilde{H})$ é um par de interpolação relativo a $(\mathbb{E},\mathbb{F})$. Ainda mais

$$\|T\|_{\tilde{G}\to\tilde{H}} \leq \|T\|_{G\to H}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se $x \in \tilde{G}$ então existe uma sequência $\{x_n\} \subset G$. tal que $x_n \to x$ em ΣE_k e $\|x_n\|_G = \|x\|_{\tilde{G}}$. Então, para todo operador $T \in L(\mathbb{E},\mathbb{F})$ nós temos $T(x_n) \to T(x)$ em ΣF_k e

$$\|Tx_n\|_H \leq \|T\|_{G\to H} \|x_n\|_G = \|T\|_{G\to H} \|x\|_{\tilde{G}} .$$

Logo $Tx \in \tilde{H}$ e $\|Tx\|_{\tilde{H}} \leq \|T\|_{G\to H} \|x\|_{\tilde{G}}$.

1.7.8. TIPO DE UM PAR DE INTERPOLAÇÃO

DEFINIÇÃO. O par (G,H) é dito um *par de interpolação do tipo* α, $(0,0) \leq \alpha \leq (1,1)$, relativo ao par $(\mathbb{E},\mathbb{F})$ se ele é um par de interpolação e vale a desigualdade:

$$(1) \quad \|T\|_{G\to H} \leq c\, \|T\|_{E_{00}\to F_{00}}^{(1-\alpha^1)(1-\alpha^2)} \|T\|_{E_{10}\to F_{10}}^{\alpha^1(1-\alpha^2)} \|T\|_{E_{01}\to F_{01}}^{(1-\alpha^1)\alpha^2} \|T\|_{E_{11}\to F_{11}}^{\alpha^1\alpha^2}$$

$$= c \prod_{k\in\square} \|T\|_{E_k\to F_k}^{\alpha(k)}$$

onde $\alpha(k) = \prod_{j=1}^{2} [(1-k_j) + (-1)^{k_j+1}\alpha^j]$.

Se a constante c em (1) é igual a 1 então (G,H) é dito um par de interpolação normalizado do tipo α relativo a $(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

Teoremas que estabelecem que um par (G,H) é um par de interpolação relativa a um outro $(\mathbb{E},\mathbb{F})$ são chamados teoremas de interpolação.

Consideremos agora as famílias $(E_\alpha,\ \alpha_{00} \leq \alpha \leq \alpha_{11})$ e $(F_\beta,\ \beta_{00} \leq \beta \leq \beta_{11})$ de espaços de Banach relativas aos esqueletos $\mathbb{E} = (E_{\alpha_k}, k \in \square)$ e $\mathbb{F} = (F_{\beta_k}, k \in \square)$ respectivamente.

1.7.9. DEFINIÇÃO. Dizemos que a família $(E_\alpha,\ \alpha_{00} \leq \alpha \leq \alpha_{11})$ tem:

(a) a propriedade de interpolação relativa à família $(F_\beta,\ \beta_{00} \leq \beta \leq \beta_{11})$ se o par (E_α,F_β) é um par de interpolação relativa a $(\mathbb{E},\mathbb{F})$ onde β satisfaz a igualdade

$$(2) \qquad (\alpha^j - \alpha_0^j)/(\alpha_1^j - \alpha_0^j) = (\beta^j - \beta_0^j)/(\beta_1^j - \beta_0^j) \qquad j = 1,2,$$

(b) a propriedade de interpolação normalizada relativa a família $(F_\beta,\ \beta_{00} \leq \beta \leq \beta_{11})$ se o par (E_α,F_β) é um par de interpolação normalizada do tipo θ relativo a $(\mathbb{E},\mathbb{F})$ onde

$$\theta^j = (\alpha^j - \alpha_0^j)/(\alpha_1^j - \alpha_0^j) \qquad j = 1,2.$$

(c) a propriedade de interpolação forte relativa a família $(F_\beta,\ \beta_{00} \leq \beta \leq \beta_{11})$ se cada parte dela $(E_\alpha,\ \overline{\alpha}_{00} \leq \alpha \leq \overline{\alpha}_{11})$ $\alpha_{00} \leq \overline{\alpha}_{00} < \overline{\alpha}_{11} \leq \alpha_{11}$, tem a propriedade de interpolação normalizada relativa a correspondente parte da família $(F_\beta,\ \beta_{oo} \leq \beta \leq \beta_{11})$. A correspondencia é dada por (2).

1.7.10. TEOREMA. Seja $\mathbb{F} = (F_k\ , k \in \square)$ uma família de espaços de Banach tal que se $k \geq k'$ então F_k está normalmente imerso em $F_{k'}$, e seja $(E_\alpha^{max},\ 0 \leq \alpha \leq 1)$ a escala normal maximal construida da família $\mathbb{F}$. Então esta escala tem a propriedade de interpolação forte relativa a qualquer escala normal $(F_\alpha, (0,0) \leq \alpha \leq (1,1))$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja A o operador linear limitado levando E_{11}^{max} em F_{11} tal que

$$\|Ax\|_{F_k} \leq c_k \|x\|_{E_k^{max}} \quad (x \in E_{11}^{max}), \quad k \in \square .$$

Mostraremos agora que a função

$$H(x,\alpha) = C_{oo}^{(\alpha^1-1)(1-\alpha^2)}\ C_{10}^{\alpha^1(\alpha^2-1)}\ C_{01}^{(\alpha^1-1)\alpha^2}\ C_{11}^{-\alpha^1\alpha^2}\ \|Ax\|_{F_\alpha}$$

satisfaz as hipóteses do Lema 1.6.3.

É imediato que $H(x,\alpha)$ é uma seminorma para α fixo. Para verificar que $H(x,\alpha)$ satisfaz 1.3.1(2) para x fixo basta observar que para $0 \leq \beta_{oo} \leq \gamma \leq \beta_{11} \leq 1$ temos:

$$(\gamma^1 - 1)(1 - \gamma^2) = u_0^1 u_0^2 (\beta_0^1 - 1)(1 - \beta_0^2) + u_1^1 u_0^2 (\beta_1^1 - 1)(1 - \beta_0^2) +$$

$$+ u_0^1 u_1^2 (\beta_0^1 - 1)(1 - \beta_1^2) + u_1^1 u_1^2 (\beta_1^1 - 1)(1 - \beta_1^2)$$

$$\gamma^1(\gamma^2 - 1) = u_0^1 u_0^2 \beta_0^1 (\beta_0^2 - 1) + u_1^1 u_0^2 \beta_1^1 (\beta_0^2 - 1) +$$

$$+ u_0^1 u_1^2 \beta_0^1 (\beta_1^2 - 1) + u_1^1 u_1^2 \beta_1^1 (\beta_1^2 - 1)$$

$$(\gamma^1 - 1)\gamma^2 = u_0^1 u_0^2 (\beta_0^1 - 1)\beta_0^2 + u_1^1 u_0^2 (\beta_1^1 - 1)\beta_0^2 +$$

$$+ u_0^1 u_1^2 (\beta_0^1 - 1)\beta_1^2 + u_1^1 u_1^2 (\beta_1^1 - 1)\beta_1^2$$

$$\cdot\ \gamma^1\gamma^2 = u_0^1 u_0^2 \beta_0^1 \beta_0^2 + u_1^1 u_0^2 \beta_1^1 \beta_0^2 + u_0^1 u_1^2 \beta_0^1 \beta_1^2 + u_1^1 u_1^2 \beta_1^1 \beta_1^2$$

onde $u_0^j = (\beta_1^j - \gamma^j)/(\beta_1^j - \beta_0^j) \qquad j = 1,2$

$$u_1^j = (\gamma^j - \beta_0^j)/(\beta_1^j - \beta_0^j)$$

e observando que $u_0^j \beta_0^j + u_1^j \beta_1^j = \gamma^j$, $u_0^j + u_1^j = 1$, $j = 1,2$.

Destas igualdades temos imediatamente

$$H(x,\gamma) \leq H(x,\beta_{00})^{u_0^1 u_0^2} H(x,\beta_{10})^{u_1^1 u_0^2} H(x,\beta_{01})^{u_0^1 u_1^2} H(x,\beta_{11})^{u_1^2 u_1^2}$$

e portanto a função $H(x,\alpha)$ satisfaz as condições do Lema 1.6.3. Logo

$$\|Ax\|_{F_\alpha} \leq C_{00}^{(1-\alpha^1)(1-\alpha^2)} \, C_{10}^{\alpha^1(1-\alpha^2)} \, C_{01}^{(1-\alpha^1)\alpha^2} \, C_{11}^{\alpha^1\alpha^2} \, \|x\|_{E_\alpha^{max}} \, .$$

Provamos então que a escala E_α^{max} tem a propriedade de interpolação normalizada relativa a F_α, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Desde que E_α^{max} é maximal em qualquer quadrado interior a $0 \leq \alpha \leq 1$ isto implica que ela tem a propriedade de interpolação forte.

1.8. ESCALAS MINIMAIS DE ESPAÇOS

Na demonstração do Teorema 1.4.5, em que demos uma caracterização para que uma família $\mathbb{E} = (E_k \, , k \in \square)$ seja relacionada nós construimos uma escala normal contínua completando o espaço E_{11} relativamente ao sistema de normas

$$\|x\|_{E_\alpha} = \sup_{f \in E'_{00}} \frac{|f(x)|}{\prod_{k \in \square} \|f\|_{E'_k}^{\alpha(k)}}$$

onde $\alpha(k) = \prod_{j=1}^{2} u_{k_j}^j$ e $u_{k_j}^j = [\,(1 - k_j) + (-1)^{k_j+1} \alpha^j\,]$. Se a família $\mathbb{E}$ é relacionada então a escala acima conecta esta família. Esta é a escala minimal e vamos denotá-la por $(E_\alpha^{min}, 0 \leq \alpha \leq 1)$ relativa ao esqueleto $\mathbb{E} = (E_k \, , k \in \square)$.

1.8.1. TEOREMA. Sejam $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ e $\mathbb{F} = (F_k, k \in \square)$ duas família de espaços de Banach tal que se $k \geq k'$ então E_k (F_k) está normalmente imerso em $E_{k'}, (F_{k'})$.

Se as famílias $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ são relacionadas então a escala $(E_\alpha^{min}, 0 \leq \alpha \leq 1)$ tem a propriedade de interpolação normalizada relativa à escala $(F_\alpha^{min}, 0 \leq \alpha \leq 1)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja A o operador limitado tal que

$$\|Ax\|_{F_k} \leq C_k \|x\|_{E_k}, \quad k \in \square \qquad (x \in E_{11}).$$

Então o operador adjunto A^* leva F_k' em E_k' e

$$\|A^*f\|_{E_k'} \leq C_k \|f\|_{F_k'} \qquad (k \in \square).$$

Seja $x \in E_{11}$. Então

$$\|Ax\|_{F_\alpha^{min}} = \sup_{f \in F'_{oo}} \frac{|f(Ax)|}{\prod_{k \in \square} \|f\|_{F_k'}^{\alpha(k)}} = \sup_{f \in F'_{oo}} \frac{|A^*f(x)|}{\prod_{k \in \square} \|f\|_{F_k'}^{\alpha(k)}}$$

$$\leq \prod_{k \in \square} C_k^{\alpha(k)} \sup_{f \in F'_{oo}} \frac{|A^*f(x)|}{\prod_{k \in \square} \|A^*f\|_{E_k'}^{\alpha(k)}} \leq$$

$$\leq \prod_{k\in\square} C_k^{\alpha(k)} \sup_{g\in E'_{oo}} \frac{|g(x)|}{\prod_{k\in\square} \|g\|_{E'_k}^{\alpha(k)}}$$

$$= \prod_{k\in\square} C_k^{\alpha(k)} \|x\|_{E_\alpha^{min}}$$

CAPÍTULO 2

ESCALAS MÚLTIPLAS E UM MÉTODO COMPLEXO DE INTERPOLAÇÃO

Exporemos aqui um método complexo de interpolação para gerar espaços intermediários entre quatro espaços de Banach. Este método foi introduzido por D. L. Fernandez em [11] e algumas de suas propriedades foram estudadas por J.I. Bertolo-D.L. Fernandez em [3]. Os parágrafos §1 ao §3 são devidos, principalmente, a estes autores. Usaremos aqui, sistematicamente, as k-integrais de Poisson (integrais de Poisson múltiplas) já utilizadas em [3]. No § 8 obtemos um teorema de interpolação utilizando a noção de completamento relativo introduzida no Capítulo 0. Veremos que esta noção, embora simples, será fundamental no estudo da dualidade dos espaços intermediários (teorema 2.9.4). No § 10 damos um teorema de reiteração. No § 11 relacionamos os espaços intermediários obtidos pelo método complexo com a teoria das escalas múltiplas do Capítulo 1 e como aplicação obtemos os espaços de Bessel-Nikol'skii como espaços de interpolação complexa entre quatro espaços de Sobolev-Nikol'skii. No §12 definimos a escala analítica de espaços e obtemos um teorema de interpolação do tipo Riesz-Thorin para estas escalas.

2.1. PRELIMINARES. Consideraremos famílias $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ de quatro espaços de Banach imersos continuamente num mesmo espaço vetorial topológico Hausdorff V. Famílias desse tipo são chamadas famílias admissíveis de espaços de Banach em relação a V.

Lembramos que se $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ é uma família admissivel de espaços de Banach em relação a V então sua envoltória linear $\Sigma\mathbb{E}$ e sua intersecção $\cap\mathbb{E}$ são definidas por

$$\Sigma \mathbb{E} = \{x \in V \mid x = \sum_{k \in \square} x_k,\ x_k \in E_k\}$$

e

$$\cap \mathbb{E} = \{x \in V \mid x \in E_k\ ,\ \ k \in \square\}.$$

Estes espaços são espaços de Banach quando considerados, respectivamente, com as normas

(1) $$\|x\|_{\Sigma\mathbb{E}} = \inf \{ \sum_{k \in \square} \|x_k\|_{E_k} \ /\ x = \sum_{k \in \square} x_k\ ,\ \ x_k \in E_k\}$$

(2) $$\|x\|_{\cap\mathbb{E}} = \max \{\|x\|_{E_k} \ /\ k \in \square\}.$$

Ainda mais, um espaço de Banach X que satisfaz a condição:

(3) $$\cap\mathbb{E} \subset X \subset \Sigma\mathbb{E}$$

com inclusão contínua, será chamado um espaço intermediário em relação a família admissível $\mathbb{E}$.

2.2. O ESPAÇO $H(\mathbb{E})$

2.2.1. DEFINIÇÃO. Dada uma família admissível $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ de espaços de Banach complexos definimos o espaço $H(\mathbb{E})$ como sendo constituido de todas as funções f definidas em S_2 com valores em $\Sigma\mathbb{E}$, contínuas e limitadas em S_2 em relação a norma de $\Sigma\mathbb{E}$, analíticas em $\mathring{S}_2$ e tal que $f(k + it) \in E_k$ é E_k-contínua e limitada para todo $k \in \square$.

Sobre o espaço $H(\mathbb{E})$ definimos

(1) $$\|f\|_{H(\mathbb{E})} = \max_{k \in \square} \ \sup_{t \in \mathbb{R}^2} \|f(k + it)\|_{E_k} .$$

Como consequência do princípio do módulo máximo para a polifaixa S_2 (Lema 0.5.4) obtemos que o funcional $\| \cdot \|_{H(\mathbb{E})}$ define uma norma em $H(\mathbb{E})$.

2.2.2. TEOREMA. O espaço $H(\mathbb{E})$ munido da norma 2.2.1(1) é um espaço de Banach.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2].

2.3. O ESPAÇO INTERMEDIÁRIO $\mathbb{E}_\Theta = [\mathbb{E}]_\Theta = [E_k, k \in \square]_\Theta$

Seja $\Theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $0 \leq \theta_j \leq 1$, $j = 1,2$. Neste caso é usual escrever $0 \leq \Theta \leq 1$.

2.3.1. DEFINIÇÃO. Dada uma família admissível $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ de espaços de Banach complexos e um par $0 \leq \Theta = (\theta_1, \theta_2) \leq 1$ consideremos o espaço $\mathbb{E}_\Theta$ definido por

(1) $$\mathbb{E}_\Theta = \{x \in \Sigma\mathbb{E} \;/\; x = f(\Theta),\; f \in H(\mathbb{E})\}.$$

2.3.2. PROPOSIÇÃO. A função

(1) $$\|x\|_{\mathbb{E}_\Theta} = \|x\|_\Theta = \inf \{\|f\|_{H(\mathbb{E})} \;/\; x = f(\Theta)\}$$

é uma norma em $\mathbb{E}_\Theta$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2].

2.3.3. PROPOSIÇÃO. O espaço $\mathbb{E}_\Theta$ com a norma $\| \;\|_\Theta$ é um espaço de Banach e $\cap\mathbb{E} \subset \mathbb{E}_\Theta \subset \Sigma\mathbb{E}$ com constante de imersão 1.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2].

OBSERVAÇÃO. Do Corolário 0.5.7 segue que toda função $f \in H(\mathbb{E})$ pode ser escrita como a integral de Poisson de seus valores na fronteira reduzida de S_2.

2.4. CARACTERIZAÇÃO DE $[\mathbb{E}]_\Theta$ ENVOLVENDO O NÚCLEO DE POISSON

2.4.1. Para as caracterizações que temos adiante os três próximos resultados são fundamentais e suas demonstrações podem ser encontradas em [5].

Entretanto, estes resultados foram demonstrados para famílias $\mathbb{E} = \{E_0, E_1\}$ com dois espaços de Banach e um parâmetro θ, $0 < \theta < 1$ e $P_k(\theta,t)$ é o núcleo de Poisson para a faixa unitária S_1, $k = 0,1$.

2.4.2. LEMA. Para toda $f \in H(\mathbb{E})$ e $0 < \theta < 1$ temos:

$$(1) \qquad \log \| f(\theta)\|_\theta \le \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}} [\log \| f(k+it)\|_{E_k}] P_k(\theta,t)dt.$$

2.4.3. COROLÁRIO. Para toda $f \in H(\mathbb{E})$ e $0 < \theta < 1$ temos

$$(1) \qquad \| f(\theta)\|_\theta \le \prod_{k\in\square} [\frac{1}{\theta(k)} \int_{\mathbb{R}} \| f(k+it)\|_{E_k} P_k(\theta,t)dt]^{\theta(k)}$$

onde $\theta(k) = [(1-k) + (-1)^{1-k}\theta]$, $k = 0,1$,

e

$$(2) \qquad \| f(\theta)\|_\theta \le \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}} \| f(k+it)\|_{E_k} P_k(\theta,t)dt.$$

2.4.4. TEOREMA. Se $a \in \mathbb{E}_\theta$, $0 < \theta < 1$ temos

$$\| a\|_\theta = \inf \{ \prod_{k\in\square} \| f(k+it)\|^{\theta(k)}_{L^\infty(E_k)} \;/\; a = f(\theta),\ f \in H(\mathbb{E})\}$$

Entretanto, quando trabalhamos com famílias de quatro espaços de Banach $\mathbb{E} = (E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11})$ e dois parâmetros $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$ a situação é mais complexa. A desigualdade 2.4.2.(1), neste caso, não é válida em geral como foi mostrado em [6]. Assim, perdemos também as desigualdades 2.4.3.(1), 2.4.3.(2) e o teorema 2.4.4. cujas demonstrações, como são conhecidas na literatura, decorrem da desigualdade 2.4.2.(1). Nós iremos então particularizar a família $\mathbb{E}$ sem perder de vista que os principais espaços aos quais se aplica a teoria de interpolação satisfazem esta particularidade e então recuperaremos as desigualdades 2.4.3.(1) e (2) e o teorema 2.4.4. que serão essenciais nos resultados subsequentes.

A seguir denotaremos por $H_0(\mathbb{E})$ o conjunto das funções da forma

$$g(z) = [\exp(\delta \sum_{j=1}^{2} z_j^2)] \sum_{p=1}^{N} x_p \exp(\lambda_p \sum_{j=1} z_j)$$

onde $x_p \in \cap \mathbb{E}$, $\lambda_p \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ e $z = (z_1, z_2) \in S_2$.

Consideremos agora as funções holomorfas $f : C^2 \to \cap \mathbb{E}$ tal que

$$\lim_{z \in S_2, |z| \to \infty} \| f(z) \|_{\cap \mathbb{E}} = 0$$

e chamaremos de $F_0(\mathbb{E})$ o espaço das restrições a S_2 destas funções.

Como $H_0(\mathbb{E}) \subset F_0(\mathbb{E}) \subset H(\mathbb{E})$ e $H_0(\mathbb{E})$ é denso em $H(\mathbb{E})$ (ver [11]) então temos.

2.4.5. PROPOSIÇÃO. $F_0(\mathbb{E})$ é denso em $H(\mathbb{E})$.

2.4.6. PROPOSIÇÃO. Seja $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach e $0 < \Theta = (\theta_1, \theta_2) < 1$.

Então

$$[E_k, k \in \square]_{\theta_1,\theta_2} \overset{1}{\hookrightarrow} [[E_{00}, E_{10}]_{\theta_1}, [E_{01}, E_{11}]_{\theta_1}]_{\theta_2} .$$

DEMONSTRAÇÃO. Nós provaremos inicialmente que para toda $f \in F_0(\mathbb{E})$ temos

(1) $$\|f(\theta_1,\theta_2)\|_X \le \|f\|_{H(\mathbb{E})}$$

onde $X = [[E_{00},E_{10}]_{\theta_1}, [E_{01},E_{11}]_{\theta_1}]_{\theta_2}$.

Observamos que se $f \in F_0(\mathbb{E})$ então

$$f(\theta_1,z_2) \in H([E_{00},E_{10}]_{\theta_1},[E_{01},E_{11}]_{\theta_1}),$$

$$f(z_1,it_2) \in H(E_{00},E_{10}) \quad \text{e} \quad f(z_1,1+it_2) \in H(E_{01},E_{11}).$$

Usando sucessivamente 2.4.3.(2) para $n = 1$ teremos:

$$\begin{aligned}
\|f(\theta_1,\theta_2)\|_X &\le \int_{\mathbb{R}} P_0(\theta_2,t_2)\|f(\theta_1,it_2)\|_{[E_{00},E_{10}]_{\theta_1}} dt_2 + \\
&+ \int_{\mathbb{R}} P_1(\theta_2,t_2)\|f(\theta_1,1+it_2)\|_{[E_{01},E_{11}]_{\theta_1}} dt_2 \le \\
&\le \int_{\mathbb{R}} P_0(\theta_2,t_2)\left[\int_{\mathbb{R}} P_0(\theta_1,t_1)\|f(it_1,it_2)\|_{E_{00}} dt_1 + \right. \\
&+ \left.\int_{\mathbb{R}} P_1(\theta_1,t_1)\,\|f(1+it_1,it_2)\|_{E_{10}} dt_1\right] dt_2 + \\
&+ \int_{\mathbb{R}} P_1(\theta_2,t_2)\left[\int_{\mathbb{R}} P_0(\theta_1,t_1)\|f(it_1,1+it_2)\|_{E_{01}} dt_1 + \right. \\
&+ \left.\int_{\mathbb{R}} P_1(\theta_1,t_1)\|f(1+it_1,1+it_2)\|_{E_{11}} dt_1\right] dt_2 =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^2} P_k(\Theta,t) \| f(k + it) \|_{E_k} dt \leq$$

$$\leq \max_{k \in \square} \sup_{t \in \mathbb{R}^2} \| f(k + it) \|_{E_k} = \| f \|_{H(\mathbb{E})}$$

e portanto (1) fica demonstrada para $f \in F_0(\mathbb{E})$.

Sejam agora $x \in \mathbb{E}_\Theta$, $f \in H(\mathbb{E})$ com $f(\Theta) = x$ e $f_n \in F_0(\mathbb{E})$ tal que $\| f_n - f \|_{H(\mathbb{E})} \to 0$ e assim $\| f_n(\Theta) - x \|_\Theta \to 0$.

A desigualdade (1) mostra que $\{f_n(\Theta)\}$ é uma sequência de Cauchy em X e como $\mathbb{E}_\Theta$ e X estão imersos em $\Sigma\mathbb{E}$ segue que $x \in X$ e $\| f_n(\Theta) - x \|_X \to 0$.

Agora,

$$\| x \|_X \leq \| x - f_n(\Theta) \|_X + \| f_n(\Theta) \|_X \leq \varepsilon + \| f_n \|_{H(\mathbb{E})}.$$

Como ε é arbitrário e fazendo $n \to +\infty$ temos

$$\| x \|_X \leq \| f \|_{H(\mathbb{E})}$$

e como f é arbitrária temos

$$\| x \|_X \leq \| x \|_{\mathbb{E}_\Theta}.$$

2.4.7. DEFINIÇÃO. Diremos que uma família admissível de espaços de Banach $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ é iterativa se

$$[E_k, k \in \square]_{\theta_1,\theta_2} = [[E_{00}, E_{10}]_{\theta_1}, [E_{01}, E_{11}]_{\theta_1}]_{\theta_2},$$

com normas iguais.

OBSERVAÇÃO. Se $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ é uma família iterativa e $x \in \cap\mathbb{E}$ então definindo a função $f : S_2 \to \cap\mathbb{E}$ por $f(z_1,z_2) = x$ teremos que $f \in H(\mathbb{E})$, $f \in H([E_{00},E_{10}]_{\theta_1},[E_{01},E_{11}]_{\theta_1})$ e ainda mais:

$$\|x\|_{\theta_1,\theta_2} = \|x\|_{[[E_{00},E_{10}]_{\theta_1},\ [E_{01},E_{11}]_{\theta_1}]_{\theta_2}} \leq \|x\|^{1-\theta_2}_{[E_{00},E_{10}]_{\theta_1}} \|x\|^{\theta_2}_{[E_{01},E_{11}]_{\theta_1}}$$

$$\leq [\|x\|^{1-\theta_1}_{E_{00}} \|x\|^{\theta_1}_{E_{10}}]^{1-\theta_2} [\|x\|^{1-\theta_1}_{E_{01}} \|x\|^{\theta_1}_{E_{11}}]^{\theta_2}.$$

Ou seja

$$\|x\|_{\theta_1,\theta_2} \leq \prod_{k\in\square} \|x\|^{\Theta(k)}_{E_k}$$

onde $\quad \Theta(k) = \prod_{j=1}^{2} [(1-k_j) + (-1)^{1-k_j}\theta_j].$

Veremos agora uma afirmação mais geral:

2.4.8. TEOREMA. Se $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ é uma família iterativa e $x \in \mathbb{E}_\Theta$, $0 < \Theta = (\theta_1,\theta_2) < 1$ temos

$$(1)\quad \|x\|_\Theta = \inf\{\prod_{k\in\square} \|f(k+it)\|^{\Theta(k)}_{L^\infty(E_k)} \mid x = f(\theta),\ f \in H(\mathbb{E})\}$$

e

$$(2)\quad \|x\|_\Theta \leq \prod_{k\in\square} [\frac{1}{\Theta(k)} \int_{\mathbb{R}^2} \|f(k+it)\|_{E_k} P_k(\Theta,t)dt]^{\Theta(k)}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Provaremos inicialmente que se $f \in F_0(\mathbb{E})$ então (1) e (2) são verdadeiras.

Com efeito, se $f \in F_0(\mathbb{E})$ então $f \in H(\mathbb{E})$,

$$f(\theta_1,z_2) \in H([E_{00},E_{10}]_{\theta_1}, [E_{01},E_{11}]_{\theta_1}), \quad f(z_1,it_2) \in H(E_{00},E_{10}),$$

$$f(z_1,1+it_2) \in H(E_{01},E_{11})$$

e usando 2.4.3.(1) teremos:

$$\|f(\theta_1,\theta_2)\|_{\Theta} = \|f(\theta_1,\theta_2)\|_{[[E_{00},E_{10}]_{\theta_1}, [E_{01},E_{11}]_{\theta_1}]_{\theta_2}} \leq$$

$$\leq \left[\frac{1}{1-\theta_2}\int_{\mathbb{R}} \|f(\theta_1,it_2)\|_{[E_{00},E_{10}]_{\theta_1}} P_0(\theta_2,t_2)dt_2\right]^{1-\theta_2} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{\theta_2}\int_{\mathbb{R}} P_1(\theta_2,t_2)\|f(\theta_1,1+it_2)\|_{[E_{01},E_{11}]_{\theta_1}} dt_2\right]^{\theta_2}$$

e portanto

$$(3)\quad \|f(\Theta)\|_{\Theta} \leq \left\{\frac{1}{1-\theta_2}\int_{\mathbb{R}} P_0(\theta_2,t_2)\left[\left(\frac{1}{1-\theta_1}\int_{\mathbb{R}} P_0(\theta_1,t_1)\|f(it_1,it_2)\|_{E_{00}}dt_1\right)^{1-\theta_1}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(\frac{1}{\theta_1}\int_{\mathbb{R}} P_1(\theta_1,t_1)\|f(1+it_1,it_2)\|_{E_{10}}dt_1\right)^{\theta_1}\right]dt_2\right\}^{1-\theta_2} \cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{\theta_2}\int_{\mathbb{R}} P_1(\theta_2,t_2)\left[\left(\frac{1}{1-\theta_1}\int_{\mathbb{R}} P_0(\theta_1,t_1)\|f(it_1,1+it_2)\|_{E_{01}}dt_1\right)^{1-\theta_1}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(\frac{1}{\theta_1}\int_{\mathbb{R}} P_1(\theta_1,t_1)\|f(1+it_1,1+it_2)\|_{E_{11}}dt_1\right)^{\theta_1}\right]dt_2\right\}^{\theta_2}.$$

Agora, como

$$P_0(\theta_2,t_2)/(1-\theta_2) = [P_0(\theta_2,t_2)/(1-\theta_2)]^{1-\theta_1}[P_0(\theta_2,t_2)/(1-\theta_2)]^{\theta_1}$$

$$P_1(\theta_2,t_2)/\theta_2 = [P_1(\theta_2,t_2)/\theta_2]^{1-\theta_1}[P_1(\theta_2,t_2)/\theta_2]^{\theta_1}$$

e usando a desigualdade de Hölder:

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)^{1-\theta_1} h(t)^{\theta_1} dt \leq \left[\int_{\mathbb{R}} g(t)dt\right]^{1-\theta_1} \left[\int_{\mathbb{R}} h(t)dt\right]^{\theta_1}$$

teremos de (3):

$$(4) \quad \| f(\theta_1,\theta_2)\|_\Theta \leq \prod_{k\in\square} \left[\frac{1}{\Theta(k)} \int_{\mathbb{R}^2} \| f(k + it)\|_{E_k} P_k(\Theta,t)dt\right]^{\Theta(k)}$$

onde $\Theta(k) = \prod_{j=1}^{2} [(1 - k_j) + (- 1)^{1-k_j} \theta_j]$ e $f \in F_0(\mathbb{E})$.

Agora, de (3) obtemos imediatamente:

$$\| f(\Theta)\|_\Theta \leq \| f(it_1,it_2)\|_{L_t^\infty(E_{00})}^{(1-\theta_1)(1-\theta_2)} \| f(1 + it_1,t_2)\|_{L_t^\infty(E_{10})}^{\theta_1(1-\theta_2)} \cdot$$

$$\cdot \| f(it_1,1 + it_2)\|_{L_t^\infty(E_{01})}^{(1-\theta_1)\theta_2} \| f(1 + it_1,1 + it_2)\|_{L_t^\infty(E_{11})}^{\theta_1\theta_2}$$

ou seja

$$(5) \qquad \| f(\Theta)\|_\Theta \leq \prod_{k\in\square} \| f(k + it)\|_{L^\infty(E_k)}^{\Theta(k)} \qquad (f \in F_0(\mathbb{E})) .$$

Seja agora $x \in \mathbb{E}_\Theta$, $f \in H(\mathbb{E})$ com $f(\Theta) = x$ e $f_n \in F_0(\mathbb{E})$ tal que $\| f_n - f\|_{H(\mathbb{E})} \to 0$ (i.é, $\max_{k\in\square} \sup_{t\in\mathbb{R}^2} \| f_n(k+it) - f(k+it)\|_{E_k} \to 0$).

Portanto $\| f_n(\Theta) - f(\Theta)\|_\Theta \to 0$ e assim

$$\| x \|_\Theta = \| f(\Theta)\|_\Theta \leq \| f(\Theta) - f_n(\Theta)\|_\Theta + \| f_n(\Theta)\|_\Theta \leq$$

$$\leq \varepsilon + \prod_{k\in\square} \| f_n(k + it)\|_{L^\infty(E_k)}^{\Theta(k)} .$$

Fazendo $n \to +\infty$ teremos:

$$\|x\|_\Theta \leq \varepsilon + \prod_{k\in\square} \|f(k+it)\|_{L^\infty(E_k)}^{\Theta(k)}$$

e como ε é arbitrário temos:

$$(6) \qquad \|x\|_\Theta \leq \prod_{k\in\square} \|f(k+it)\|_{L^\infty(E_k)}^{\Theta(k)}$$

para toda $f \in H(\mathbb{E})$ com $f(\Theta) = x$.

Logo

$$\|x\|_\Theta \leq \inf_f \prod_{k\in\square} \|f(k+it)\|_{L^\infty(E_k)}^{\Theta(k)}$$

Para provar a desigualdade contrária consideremos uma função $f \in H(\mathbb{E})$ com $f(\Theta) = x$. Assim

$$\prod_{k\in\square} \|f(k+it)\|_{L^\infty(E_k)}^{\Theta(k)} \leq \prod_{k\in\square} \|f\|_{H(\mathbb{E})}^{\Theta(k)} = \|f\|_{H(\mathbb{E})}$$

pois $\Sigma\Theta(k) = 1$.

Logo

$$\inf_{f,f(\theta)=x} \prod_{k\in\square} \|f(k+it)\|_{L^\infty(E_k)}^{\Theta(k)} \leq \inf_{f,f(\theta)=x} \|f\|_{H(\mathbb{E})} = \|x\|_\Theta$$

e portanto:

$$\|x\|_\Theta = \inf \{ \prod_{k\in\square} \|f(k+it)\|_{L^\infty(E_k)}^{\Theta(k)} \ / \ f \in H(\mathbb{E}), \quad f(\Theta) = x \}.$$

Por um argumento análogo ao usado na obtenção da desigualdade (6) temos também:

$$\|f(\theta_1,\theta_2)\|_\Theta \leq \prod_{k\in\square} \left[\frac{1}{\Theta(k)} \int_{\mathbb{R}^2} \|f(k+it)\|_{E_k} P_k(\Theta,t)dt\right]^{\Theta(k)}.$$

2.4.9. TEOREMA. Seja $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ uma família iterativa. Para toda $f \in H(\mathbb{E})$ e $0 < \Theta = (\theta_1,\theta_2) < 1$ temos

(1) $$\|f(\Theta)\|_\Theta \leq \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} \|f(k+it)\|_{E_k} P_k(\Theta,t)dt.$$

DEMONSTRAÇÃO. Provaremos a desigualdade (1) para $f \in F_0(\mathbb{E})$ e por um argumento análogo ao do teorema anterior teremos o resultado desejado.

Com efeito, de 2.4.3.(2) para $n = 1$ temos:

$$\|f(\Theta)\|_\Theta = \|f(\theta_1,\theta_2)\|_{[[E_{00},E_{10}]_{\theta_1},\,[E_{01},E_{11}]_{\theta_1}]_{\theta_2}} \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} P_0(\theta_2,t_2)\|f(\theta_1,it_2)\|_{[E_{00},E_{10}]_{\theta_1}} dt_2 +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} P_1(\theta_2,t_2)\|f(\theta_1,1+it_2)\|_{[E_{01},E_{11}]_{\theta_1}} dt_2 \leq$$

$$\leq \left[\int_{\mathbb{R}} P_0(\theta_2,t_2)\left(\int_{\mathbb{R}} P_0(\theta_1,t_1)\|f(it_1,it_2)\|_{E_{00}} dt_1 +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{\mathbb{R}} P_1(\theta_1,t_1)\|f(1+it_1,it_2)\|_{E_{10}} dt_1\right) dt_2\right] +$$

$$+ \left[\int P_1(\theta_2,t_2)\left(\int_{\mathbb{R}} P_0(\theta_1,t_1)\|f(it_1,1+it_2)\|_{E_{01}} dt_1 +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{\mathbb{R}} P_1(\theta_1,t_1)\|f(1+it_1,1+it_2)\|_{E_{11}} dt_1\right) dt_2\right] =$$

$$= \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} P_k(\Theta,t)\|f(k+it)\|_{E_k}\,dt$$

e portanto

$$\|f(\Theta)\|_\Theta \leq \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} \|f(k+it)\|_{E_k} P_k(\Theta,t)\,dt \qquad (f \in F_0(\mathbb{E}))$$

como queriamos demonstrar.

2.5. TEOREMA DE INTERPOLAÇÃO. Sejam $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ e $\mathbb{F} = (F_k, k \in \square)$ duas famílias admissíveis de espaços de Banach. Então o par $(\mathbb{E}_\Theta, \mathbb{F}_\Theta)$ é um par de interpolação relativo ao par $(\mathbb{E},\mathbb{F})$. Se ainda mais, a família $\mathbb{F}$ é iterativa então o par $(\mathbb{E}_\Theta, \mathbb{F}_\Theta)$ é um par de interpolação normalizado do tipo Θ relativo ao par $(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

DEMONSTRAÇÃO. Dados $x \in E_\Theta$ e $\varepsilon > 0$ existe $f \in H(\mathbb{E})$ tais que $x = f(\Theta)$ e $\|f\|_{H(\mathbb{E})} < \|x\|_\Theta + \varepsilon$.

Se T é um operador limitado da família $\mathbb{E}$ no família $\mathbb{F}$ (veja definição 1.7.1.) então a função g definida em S_2 por

$$g(z) = T \circ f(z)$$

pertence a $H(\mathbb{F})$ pois T é uma aplicação linear contínua de $\Sigma\mathbb{E}$ em $\Sigma\mathbb{F}$ e $T(E_k) = \{Ty \,/\, y \in E_k\} \subset F_k$. Assim

$$Tx = Tf(\Theta) = (T \circ f)(\Theta) = g(\Theta) \in F_\Theta .$$

Assim dos Lemas 1.7.2. e 1.7.3. segue a primeira parte do nosso teorema.

Se, ainda mais, $\mathbb{F}$ é iterativa, pelo teorema 2.4.8. teremos:

$$\|Tx\|_{\mathbb{F}_\Theta} \leq \prod_{k\in\square} \|g(k+it)\|^{\Theta(k)}_{L^\infty(F_k)} = \prod_{k\in\square} \|T(f(k+it)\|^{\Theta(k)}_{L^\infty(F_k)}$$

$$\leq \prod_{k\in\square} \|T\|^{\Theta(k)}_{E_k\to F_k} \|f(k+it)\|^{\Theta(k)}_{L^\infty(E_k)} \leq$$

$$\leq \left[\prod_{k\in\square} \|T\|^{\Theta(k)}_{E_k\to F_k}\right] \|f\|_{H(\mathbb{E})} \leq \left[\prod_{k\in\square} \|T\|^{\Theta(k)}_{E_k\to F_k}\right] (\|x\|_\Theta+\varepsilon)$$

e portanto

$$\|Tx\|_{\mathbb{F}_\Theta} \leq \left[\prod_{k\in\square} \|T\|^{\Theta(k)}_{E_k\to F_k}\right] \|x\|_{\mathbb{E}_\Theta}$$

como queriamos demonstrar.

2.5.1. OBSERVAÇÃO. Sejam $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ e $\mathbb{F} = (F_k, k \in \square)$ duas famílias admissíveis de espaços de Banach, $0 < \Theta = (\theta_1,\theta_2) < 1$. Sejam $X = [[E_{00},E_{10}]_{\theta_1}, [E_{01},E_{11}]_{\theta_1}]_{\theta_2}$ e $Y = [[F_{00},F_{10}]_{\theta_1},[F_{01},F_{11}]_{\theta_1}]_{\theta_2}$. Então por aplicações sucessivas do teorema de interpolação para $n = 1$ temos que o par (X,Y) é um par de interpolação normalizado do tipo θ relativo ao par $(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

2.5.2. A seguir determinaremos o espaço de interpolação entre quatro espaços $L^P(E)$ com normas mistas e utilizando o teorema 2.5 enunciaremos um teorema do tipo Riesz-Thorin. Veremos também que estes espaços fornecem um importante exemplo de famílias iterativas e através da noção de retração, que será definida logo adiante, veremos que os mais importantes espaços aos quais se aplica a teoria de interpolação são famílias iterativas.

Seja E um espaço de Banach, $(X_1 \times X_2, \mu_1 \cdot \mu_2) = (X,\mu)$ um espaço de medida σ-finito, $\mathbb{1} \leq P = (p_1,p_2) \leq \infty$ e $L^P(E) = L^P(X,\mu,E)$ o espaço das funções fortemente mensuráveis com normas mistas introduzidas por Benedek-Panzone [1].

2.5.3. LEMA. Para toda função $f \in L^P(E)$, $\mathbb{1} \leq P = (p_1,p_2) < \infty$ temos:

$$\|f\|_{L^P(E)} = \sup \left| \int_X \langle f(s),g(s)\rangle d\mu(s) \right| = \sup \int_X |\langle f(s),g(s)\rangle| d\mu$$

$$= \sup \int \|f(s)\|_E \, \|g(s)\|_{E'} d\mu$$

onde o sup é tomado sobre as funções simples com valores em E', i.é, $g \in S(E')$ e $\|g\|_{L^Q(E')} = 1$.

O simbolo $\langle f(s),g(s)\rangle$ denota o valor do funcional linear limitado $g(s)$ aplicado em $f(s)$. Lembremos que se $f : X \to E$ e $g : X \to E'$ são fortemente mensuráveis então a função $h : X \to K$ definida por $h(s) = \langle f(s),g(s)\rangle$ é mensurável.

DEMONSTRAÇÃO. Se $f \in L^P(E)$ e $g \in S(E')$ com $\|g\|_{L^Q(E')} = 1$ então da desigualdade de Hölder teremos:

$$\left| \int_X \langle f(s),g(s)\rangle d\mu \right| \leq \int_X |\langle f(s),g(s)\rangle| d\mu \leq$$

$$\leq \int_X \|f(s)\|_E \, \|g(s)\|_{E'} d\mu \leq \|f\|_{L^P(E)} .$$

Basta então provar a desigualdade:

$$\|f\|_{L^P(E)} \leq \sup \left| \int \langle f(s),g(s)\rangle d\mu \right|$$

para $g \in S(E')$ e $\|g\|_Q = 1$.

Se $\|f\|_{L^P(E)} = 0$ a desigualdade é imediata.

Suporemos então $\|f\|_{L^P(E)} > 0$.

Nós vamos considerar vários casos.

1º CASO. Seja $P = (p_1,p_2) = (1,1)$ e $f \in S(E)$ isto é, $f(t_1,t_2) = \sum_{sr} x_{rs}\chi_{I_r\times J_s}(t_1,t_2)$, $0 \neq x_{rs} \in E$, I_r disjuntos e J_s disjuntos. Assim $\|f(t)\|_E = \sum_{sr} \|x_{rs}\|_E \chi_{I_r\times J_s}(t)$.

Seja $\varepsilon > 0$. Para cada r e s existe um elemento $y_{rs} \in E'$ com $\|y_{rs}\|_{E'} = 1$, $\langle x_{rs},y_{rs}\rangle$ positivo e $\langle x_{rs},y_{rs}\rangle \geq (1-\varepsilon)\|x_{rs}\|_E$.

A função $g = \sum_{sr} y_{sr}\chi_{I_r\times J_s}$ pertence a $S(E')$ e

$$\|g\|_{L^\infty(E')} = \|\|g(t_1,t_2)\|_{L^\infty_{t_1}}\|_{L^\infty_{t_2}} = \sup_s \sup_r \|y_{rs}\|_{E'} = 1.$$

Assim:

$$\langle f(t),g(t)\rangle = \langle \sum_{sr} x_{rs}\chi_{I_r\times J_s}, \sum_{sr} y_{rs}\chi_{I_r\times J_s}\rangle =$$

$$= \sum_{sr} \langle x_{rs}, y_{rs}\rangle \chi_{I_r\times J_s} \geq (1-\varepsilon)\sum_{sr} \|x_{rs}\|_E \chi_{I_r\times J_s}.$$

Logo:

$$\left|\int \langle f(t),g(t)\rangle d\mu(t)\right| = \int \langle f(t),g(t)\rangle d\mu \geq (1-\varepsilon)\int \sum_{sr} \|x_{rs}\|_E\chi_{I_r\times J_s}$$

$$= (1-\varepsilon)\sum_{sr} \|x_{rs}\|_E\mu_1(I_r)\cdot\mu_2(J_s) = (1-\varepsilon)\|f\|_{L^{(1,1)}(E)}$$

Portanto:

$$\sup \left| \int \langle f(t), g(t) \rangle d\mu(t) \right| \geq \|f\|_{L^{(1,1)}(E)}$$

para $g \in S(E')$ e $\|g\|_{L^{\infty}(E')} = 1.$

2º CASO. Seja $\mathbb{1} < P = (p_1, p_2) < \infty$ e $f = \sum_{sr} x_{rs} \chi_{I_r \times J_s}$ onde $0 \neq x_{rs} \in E$, I_r disjuntos e J_s disjuntos.

Suponhamos ainda que $\|f\|_{L^P(E)} = 1$, ou seja:

$$\left[\int_{X_2} \left(\int_{X_1} \|f(t)\|_E^{p_1} d\mu_1 \right)^{p_2/p_1} d\mu_2 \right]^{1/p_2} =$$

$$= \left[\int_{X_2} \left(\int_{X_1} \sum_s \sum_r \|x_{rs}\|_E^{p_1} \chi_{I_r \times J_s} d\mu_1 \right)^{p_2/p_1} d\mu_2 \right]^{1/p_2} =$$

$$= \left[\int_{X_2} \sum_s \left(\sum_r \|x_{rs}\|_E^{p_1} \mu_1(I_r) \chi_{J_s} \right)^{p_2/p_1} d\mu_2 \right]^{1/p_2} =$$

$$= \left[\int_{X_2} \sum_s \left(\sum_r \|x_{rs}\|_E^{p_1} \mu_1(I_r) \right)^{p_2/p_1} \chi_{J_s} d\mu_2 \right]^{1/p_2} =$$

$$= \left[\sum_r \left(\sum_s \|x_{rs}\|_E^{p_1} \mu_1(I_r) \right)^{p_2/p_1} \mu_2(J_s) \right]^{1/p_2} = 1.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Para cada r e s existe $z_{rs} \in E'$ com $\|z_{rs}\|_{E'} = 1$, $\langle x_{rs}, z_{rs} \rangle$ positivo e $\langle x_{rs}, z_{rs} \rangle \geq (1 - \varepsilon) \|x_{rs}\|_E$.

Seja $y_{rs} = z_{rs} \|x_{rs}\|_E^{p_1 - 1} \left[\sum_r \|x_{rs}\|_E^{p_1} \mu_1(I_r) \right]^{p_2/p_1 - 1}$ que vamos denotar por $y_{rs} = z_{rs} \|x_{rs}\|_E^{p_1 - 1} \cdot A_s^{p_2/p_1 - 1}$.

Assim:

$$\langle x_{rs}, y_{rs}\rangle = \|x_{rs}\|_E^{p_1-1} A_s^{p_2/p_1-1} \langle x_{rs}, z_{rs}\rangle \geq$$

$$\geq (1-\varepsilon)\|x_{rs}\|_E \, \|y_{rs}\|_{E'} .$$

Definimos agora a função $g \in S(E')$ por

$$g = \sum_{sr} y_{rs} \chi_{I_r \times J_s} .$$

Temos então:

$$\|g\|_{L^Q(E')} = \left[\int_{X_2} \left(\int_{X_1} \sum_s \sum_r \|y_{rs}\|_{E'}^{q_1} \chi_{I_r \times J_s} d\mu_1 \right)^{q_2/q_1} d\mu_2 \right]^{1/q_2}$$

$$= \left[\int_{X_2} \left(\int_{X_1} \sum_s \sum_r \|x_{rs}\|^{p_1 q_1 - q_1} A_s^{[p_2/p_1-1]q_1} \chi_{I_r \times J_s} d\mu_1 \right)^{q_2/q_1} d\mu_2 \right]^{1/q_2}$$

$$= \left\{ \int_{X_2} \left[\sum_s \left(\sum_r \|x_{rs}\|_E^{p_1} A_s^{[p_2/p_1-1]q_1} \mu_1(I_r) \right) \chi_{J_s} \right]^{q_2/q_1} d\mu_2 \right\}^{1/q_2} =$$

$$= \left[\int_{X_2} \sum_s \left(\sum_r \|x_{rs}\|_E^{p_1} A_s^{[p_2/p_1-1]q_1} \mu_1(I_r) \right)^{q_2/q_1} \chi_{J_s} d\mu_2 \right]^{1/q_2}$$

$$= \left[\int_{X_2} \sum_s A_s^{[p_2/p_1-1]q_2} \cdot A_s^{q_2/q_1} \chi_{J_s} d\mu_2 \right]^{1/q_2}$$

$$= \left[\int_{X_2} \sum_s A_s^{p_2/p_1} \chi_{J_s} d\mu_2 \right]^{1/q_2} = \left[\sum_s A_s^{p_2/p_1} \mu_2(J_s) \right]^{1/q_2}$$

$$= \left[\sum_s \left(\sum_r \|x_{rs}\|_E^{p_1} \mu_1(I_r) \right)^{p_2/p_1} \mu_2(J_s) \right]^{1/q_2} = 1.$$

Agora

$$|\langle f(t),g(t)\rangle| = \langle f(t),g(t)\rangle =$$

$$= \langle \sum_{rs} x_{rs}\, \chi_{I_r\times J_s},\ \sum_{rs} y_{rs}\, \chi_{I_r\times J_s}\rangle =$$

$$= \sum_{rs} \langle x_{rs},y_{rs}\rangle \chi_{I_r\times J_s} \geq$$

$$\geq (1-\varepsilon) \sum_{rs} \|x_{rs}\|_E \|y_{rs}\|_{E'} \chi_{I_r\times J_s}$$

e portanto teremos:

$$\left|\int \langle f(t),g(t)\rangle d\mu(t)\right| = \int \langle f(t),g(t)\rangle d\mu(t) \geq$$

$$\geq (1-\varepsilon) \int \sum_{sr} \|x_{rs}\|_E \|y_{rs}\|_{E'} \chi_{I_r\times J_s} d\mu_1 d\mu_2$$

$$= (1-\varepsilon) \sum_{sr} \|x_{rs}\|_E \|y_{rs}\|_{E'} \mu_1(I_r)\mu_2(J_s)$$

$$= (1-\varepsilon) \sum_{sr} \|x_{rs}\|_E \|x_{rs}\|_E^{p_1-1} A_s^{[p_2/p_1-1]} \mu_1(I_r)\mu_2(J_s)$$

$$= (1-\varepsilon)\left[\sum_s \sum_r \|x_{rs}\|_E^{p_1} A_s^{[p_2/p_1-1]} \mu_1(I_r)\mu_2(J_s)\right]$$

$$= (1-\varepsilon)\left[\sum_s A_s^{[p_2/p_1-1]} \left(\sum_r \|x_{rs}\|_E^{p_1} \mu_1(I_r)\right)\mu_2(J_s)\right]$$

$$= (1-\varepsilon) \sum_s A_s^{p_2/p_1} \mu_2(J_s) =$$

$$= (1-\varepsilon) \sum_s \left(\sum_r \|x_{rs}\|_E^{p_1} \mu_1(I_r)\right)^{p_2/p_1} \mu_2(J_s) = 1-\varepsilon.$$

Portanto:

$$\sup \left| \int \langle f(t), g(t) \rangle \, d\mu(t) \right| \geq 1$$

para $g \in S(E')$ e $\|g\|_{L^Q(E')} = 1.$

3º CASO. Se $1 < P = (p_1, p_2) < \infty$ e $f = \sum_{rs} x_{rs} \chi_{I_r \times J_s}$ com $\|f\|_{L^P(E)} = a > 0.$

Então $f_1 = \frac{1}{a} f \in S(E)$ e $\|f_1\|_{L^P(E)} = 1.$ Se $g \in S(E')$ com $\|g\|_{L^Q(E')} = 1$ temos

$$\int \langle f(s), g(s) \rangle \, d\mu(s) = \int \langle af_1, g \rangle \, d\mu =$$

$$= a \int \langle f_1, g \rangle \, d\mu$$

e portanto

$$\sup \int \langle f(s), g(s) \rangle \, d\mu = a \sup \int \langle f_1(s), g(s) \rangle \, d\mu$$

$$\geq a = \|f\|_{L^P(E)} .$$

4º CASO. Sejam agora $1 < P = (p_1, p_2) < \infty$ e $f \in L^P(E)$ com $\|f\|_{L^P(E)} > 0.$

Seja $\varepsilon > 0$. Então existe uma função simples $f_1 \in S(E)$ com $\|f - f_1\|_{L^P(E)} < \varepsilon$ e $\|f_1\|_{L^P(E)} > 0.$

Do 3º caso temos que existe uma função $g \in S(E')$ com $\|g\|_{L^Q(E')} = 1,$ $\langle f_1(s), g(s) \rangle$ positivo e

$$\int \langle f_1(s),g(s)\rangle d\mu \geq \|f_1\|_{L^P(E)} - \varepsilon \geq \|f\|_{L^P(E)} - 2\varepsilon.$$

Desde que

$$\left|\int \langle f - f_1,g\rangle d\mu\right| \leq \int |\langle f - f_1,g\rangle| d\mu \leq$$

$$\leq \|f - f_1\|_{L^P(E)} \|g\|_{L^Q(E')} < \varepsilon$$

nós temos então

$$\left|\int \langle f,g\rangle d\mu\right| = \left|\int(\langle f_1,g\rangle + \langle f - f_1,g\rangle)d\mu\right|$$

$$\geq \left|\int \langle f_1,g\rangle d\mu\right| - \left|\int \langle f - f_1,g\rangle d\mu\right| \geq$$

$$\geq \int \langle f_1,g\rangle d\mu - \int |\langle f - f_1,g\rangle| d\mu \geq \|f\|_{L^P(E)} - 3\varepsilon.$$

Assim,

$$\sup \left|\int \langle f(s),g(s)\rangle d\mu\right| \geq \|f\|_{L^P(E)}$$

para $g \in S(E')$ e $\|g\|_{L^Q(E')} = 1$, como queriamos demonstrar.

Seja E um espaço de Banach, $(X_1 \times X_2,\mu_1 \cdot \mu_2) = (X,\mu)$ um espaço de medida σ-finito, $\mathbb{1} \leq P = (p_1,p_2) < \infty$ e $L^P(E) = L^P(X,\mu,E)$ o espaço das funções fortemente mensuráveis com normas mistas introduzidas por Benedek-Panzone [1] .

2.5.4. TEOREMA. Seja $\mathbb{P} = (P_k, k \in \square)$ a família admissível de parâmetros associada a $\mathbb{1} \leq P_{00} = (p_0^1,p_0^2)$, $P_{11} = (p_1^1,p_1^2) < \infty$ e $0 < \Theta = (\theta_1,\theta_2) < 1$. Entaõ

$$(1) \qquad [L^{P_{00}}(E), L^{P_{10}}(E), L^{P_{01}}(E), L^{P_{11}}(E)]_\Theta = L^P(E)$$

onde $P = (p^1,p^2)$ e $1/p^i = (1 - \theta_i)/p_0^i + \theta_i/p_1^i$, $i = 1,2$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $S(E)$ o espaço das funções simples com valores em E. S é denso em $\bigcap_{k\in\square} L^{P_k}(E)$ e portanto é denso em $[L^{P_k}(E), k \in \square]_\Theta$ e também em $L^P(E)$. Então basta provar o teorema acima para funções $u \in S(E)$ isto é,

$$u = \Sigma\, c_{rs}\, \chi_{I_r \times J_s}\,, \quad c_{rs} \in E, \quad u_1(I_r) < \infty \quad \text{e} \quad u_2(J_s) < \infty.$$

Podemos ainda admitir que $\|u\|_{L^P(E)} = 1$.

Para $\varepsilon > 0$ definimos a função f em S_2 por

$$f(z_1,z_2) = e^{\varepsilon[(z_1^2-\theta_1^2)+(z_2^2-\theta_2^2)]}\, \frac{u}{\|u\|_E}\, \|u\|_E^{p^1/p^1(z_1)} \,.$$

$$\cdot\ \|u\|_{L^{p^1}_{X_1}(E)}^{p^2/p^2(z_2)-p^1/p^1(z_1)}$$

onde $1/p^i(z_i) = (1 - z_i)/p_0^i + z_i/p_1^i$, $i = 1,2$. Esta função pertence ao espaço $H(L^{P_k}(E), k \in \square)$ e ainda $f(\theta_1,\theta_2) = u$ e portanto $u \in [L^{P_k}(E), k \in \square]_\Theta$. Ainda mais

$$\|f\|_{H(L^{P_k}(E), k\in\square)} \leq e^{2\varepsilon}$$

para todo número positivo ε. Logo

$$\|f\|_{H(L^{P_k}(E),\, k \in \Box)} \leq 1.$$

Assim

(2) $$\|u\|_{\Theta} \leq 1 = \|u\|_{L^{P}(E)} .$$

Reciprocamente, seja v uma função simples com $\|v\|_{L^{Q}(E')} = 1$,

$$Q = (q^1, q^2), \quad \frac{1}{q^i} = \frac{1-\theta_i}{q_0^i} + \frac{\theta_i}{q_1^i} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_0^i} + \frac{1}{p_0^i} = 1.$$

Para cada número positivo ε definimos a função g em S_2 com valores em E' por:

$$g(z_1,z_2) = \{\exp \varepsilon[(z_1^2 - \theta_1^2) + (z_2^2 - \theta_2^2)]\} \frac{v(x)}{\|v(x)\|_{E'}} \|v(x)\|_{E'}^{q^1/q^1(z_1)} .$$

$$\cdot \|v\|_{L^{q^1}_{X_1}(E')}^{q^2/q^2(z_2) - q^1/q^1(z_1)}$$

onde $$\frac{1}{q^i(z_i)} = \frac{1-z_i}{q_0^i} + \frac{z_i}{q_1^i}, \quad i = 1,2.$$

Consideremos agora um elemento u no espaço $[L^{P_k}(E), k \in \Box]_{\Theta}$ com $\|u\|_{\Theta} = \|u\|_{\theta_1,\theta_2} = 1$. Da definição da norma no espaço $[L^{P_k}(E), k \in \Box]_{\Theta}$ podemos considerar uma função f em $H(L^{P_k}(E), k \in \Box)$ tal que $f(\theta_1,\theta_2) = u$ e $\|f\|_{H(L^{P_k}(E),\, k \in \Box)} < e^{\varepsilon}$.

A função F definida em S_2 por

$$F(z_1,z_2) = \int_{X_1 \times X_2} \langle f(z_1,z_2)(x_1,x_2), g(z_1,z_2)(x_1,x_2) \rangle du_1(x_1)du_2(x_2)$$

é contínua e limitada em S_2 e holomorfa em $\overset{\circ}{S}_2$. Então pelo lema 0.5.4. temos:

$$|F(z_1,z_2)| \leq \max_{k \in \square} \sup_{t \in \mathbb{R}^2} |F(k + it)|.$$

Desde que $|F(k + it)| \leq e^{3\varepsilon}$ com $\varepsilon > 0$ segue que

$$|F(z_1,z_2)| \leq 1 \qquad \forall (z_1,z_2) \in S_2.$$

Assim,

$$\left| \int_{X_1 \times X_2} \langle u(x_1,x_2), v(x_1,x_2) \rangle du_1(x_1)du_2(x_2) \right| = |F(\theta_1,\theta_2)| \leq 1 = \|u\|_{\theta_1,\theta_2}.$$

Então do lema 2.5.3. temos:

$$(3) \qquad \|u\|_{L^P(E)} \leq 1 = \|u\|_{\theta_1,\theta_2}$$

As desigualdades (2) e (3) nos dão

$$\|u\|_{L^P(E)} = \|u\|_{\theta_1,\theta_2},$$

como queriamos.

A seguir mostraremos que a família $\mathbb{L}^{\mathbb{P}}(E) = (L^{P_k}(E), k \in \square)$ é iterativa. Para isto precisaremos do seguinte teorema de interpolação para dois espaços de Banach e um parâmetro θ.

2.5.5. TEOREMA. Sejam E_0 e E_1 espaços de Banach, $1 \leq p_0, p_1 < \infty$ e $0 < \theta < 1$. Então

$$[L_{p_0}(E_0), L_{p_1}(E_1)]_\theta = L_p([E_0, E_1]_\theta) \qquad \text{(normas iguais)}$$

onde $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver Bergh-Lofström, Interpolation Spaces, teorema 5.1.2.

Por aplicações sucessivas do teorema acima e do teorema 2.5.4. obtemos que a família $\mathbb{L}^{\mathbb{P}}(E)$ é iterativa, ou seja:

2.5.6. PROPOSIÇÃO. Seja $\mathbb{P} = (P_k, k \in \Box)$ a família admissível de parâmetros associada a $\mathbb{1} \leq P_{00} = (p_0^1, p_0^2)$, $P_{11} = (p_1^1, p_1^2) < \infty$ e $0 < \Theta = (\theta_1, \theta_2) < \mathbb{1}$. Então

$$[L^{P_{00}}(E), L^{P_{10}}(E), L^{P_{01}}(E), L^{P_{11}}(E)]_\Theta =$$

$$= [[L^{P_{00}}(E), L^{P_{10}}(E)]_{\theta_1}, [L^{P_{01}}(E), L^{P_{11}}(E)]_{\theta_1}]_{\theta_2} = L^P(E)$$

onde $1/P = (1-\Theta)/P_{00} + \Theta/P_{11}$.

Como consequência dos teoremas 2.5, 2.5.4. e 2.5.6. obtemos o seguinte teorema de interpolação do tipo de Riesz-Thorin.

2.5.7. TEOREMA. Sejam $\mathbb{1} \leq P_0 = (p_0^1, p_0^2)$, $P_1 = (p_1^1, p_1^2) < \infty$ e $\mathbb{1} \leq Q_0 = (q_0^1, q_0^2)$, $Q_1 = (q_1^1, q_1^2) < \infty$ e consideremos as respectivas famílias admissíveis associadas, $\mathbb{P} = (P_k, k \in \Box)$ e $\mathbb{Q} = (Q_k, k \in \Box)$. Se T é uma aplicação linear tal que

$$T : L^{P_k}(X, \mu, E) \to L^{Q_k}(Y, \nu, F)$$

é limitada para todo $k \in \square$ então

$$T : L^P(X,\mu,E) \to L^Q(Y,\nu,F)$$

é limitada, onde $1/P = (1-\Theta)/P_0 + \Theta/P_1$, $1/Q = (1-\Theta)/Q_0 + \Theta/Q_1$ e $0 < \Theta = (\theta_1, \theta_2) < 1$.

Ainda mais

$$\|T\|_{L^P \to L^Q} \leq \prod_{k \in \square} \|T\|^{\Theta(k)}_{L^{P_k} \to L^{Q_k}}$$

onde $\Theta(k) = \prod_{j=1}^{2} [(1-k_j) + (-1)^{1-k_j}\theta_j]$.

Veremos ainda que outros importantes espaços aos quais se aplica a teoria de interpolação formam familias iterativas.

2.5.8. DEFINIÇÃO. Um espaço de Banach B é uma retração de um espaço de Banach A se existem operadores lineares limitados $I : B \to A$ e $P : A \to B$ tal que $P \circ I$ é a identidade em B.

Se B é uma retração de A nós temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "I"'] & & B \\ & A \arrow[ur, "P"'] & \end{tikzcd}$$

Nós diremos que uma família $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ é uma retração da família $\mathbb{F} = (F_k, k \in \square)$ se existem operadores lineares limitados I de $\mathbb{E}$ em $\mathbb{F}$ e P de $\mathbb{F}$ em $\mathbb{E}$ (veja definição 1.7.1) tal que $P \circ I$ é a identidade em $\Sigma\mathbb{E}$.

2.5.9. TEOREMA. Sejam $\mathbb{E} = (E_k, k \in \Box)$ e $\mathbb{F} = (F_k, k \in \Box)$ duas famílias admissíveis de espaços de Banach. Se a família $\mathbb{E}$ é iterativa e $\mathbb{F}$ é uma retração de $\mathbb{E}$ então a família $\mathbb{F}$ é "iterativa" (normas equivalentes).

DEMONSTRAÇÃO. Como $I/F_k : F_k \to E_k$ e $P/E_k : E_k \to F_k$ são operadores lineares contínuos então da observação 2.5.1. e como $\mathbb{E}$ é iterativa temos que

$$I \in L([[F_{00}, F_{10}]_{\theta_1}, [F_{01}, F_{11}]_{\theta_1}]_{\theta_2}, [E_k, k \in \Box]_\Theta)$$

e do teorema 2.5. temos

$$P \in L([E_k, k \in \Box]_\Theta, [F_k, k \in \Box]_\Theta).$$

Assim

$$P \circ I \in L([[F_{00}, F_{10}]_{\theta_1}, [F_{01}, F_{11}]_{\theta_1}]_{\theta_2}, [F_k, k \in \Box]_\Theta).$$

Como $P \circ I$ é a identidade em $\Sigma\mathbb{F}$ temos que

$$[[F_{00}, F_{10}]_{\theta_1}, [F_{01}, F_{11}]_{\theta_1}]_{\theta_2} \hookrightarrow [F_k, k \in \Box]_\Theta .$$

A inclusão contrária segue da proposição 2.4.6. e assim o teorema fica demonstrado.

2.5.10. TEOREMA. Seja $\mathbb{E} = (E_k, k \in \Box)$ uma família admissível de espaços de Banach tal que $\cap\mathbb{E}$ é denso em E_k, $k \in \Box$, $\mathbb{1} \leq P_{00} < P_{11} < \infty$, $0 < \Theta = (\theta_1, \theta_2) < 1$. Então se $\mathbb{E}$ é iterativa e $p_0^2 \geq p_1^1$ temos:

$$[L^{P_{00}}(E_{00}), L^{P_{10}}(E_{10}), L^{P_{01}}(E_{01}), L^{P_{11}}(E_{11})]_\Theta = L^P([\mathbb{E}]_\Theta)$$

onde $1/P = (1 - \Theta)/P_{00} + \Theta/P_{11}$, $P_{00} = (p_0^1, p_0^2)$ e $P_{11} = (p_1^1, p_1^2)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $S(\cap \mathbb{E})$ o espaço das funções simples com valores em $\cap \mathbb{E}$. Como $\cap \mathbb{E}$ é denso em $[\mathbb{E}]_\Theta$ então S é denso em $L^P([\mathbb{E}]_\Theta)$ e como S é denso em $\bigcap_{k \in \square} L^{P_k}(E_k)$ então S é denso em $[L^{P_k}(E_k), k \in \square]_\Theta$. Então basta considerar funções em $S(\cap \mathbb{E})$. Nós provaremos inicialmente que

$$\|a\|_{[L_X^{P_k}(E_k), k \in \square]_\Theta} \leq \|a\|_{L_X^P(\mathbb{E}_\Theta)} .$$

Como $a \in S$ existe uma função $g(\cdot, x) \in H(\mathbb{E})$ tal que $\|g(\cdot, x)\|_{H(\mathbb{E})} \leq (1 + \varepsilon) \|a(x)\|_{\mathbb{E}_\Theta}$ $(x \in X,\ \varepsilon > 0)$, e com $g(\Theta, x) = a(x)$.

Definimos agora

$$f(z,x) = g(z,x) \frac{(\|a(x)\|_\Theta)^{p^1(z_1)}}{(\|a\|_{L^P(\mathbb{E}_\Theta)})^{p^2(z_2)}} \|a\|_{L_{X_1}^{p^1}(\mathbb{E}_\Theta)}^{p^2(z_2) - p^1(z_1)}$$

onde $z = (z_1, z_2)$ e $p^i(z_i) = p^i(1/p_0^i - 1/p_1^i)(\theta_i - z_i)$, $i = 1, 2$. Esta função pertence ao espaço $H(L^{P_k}(E_k), k \in \square)$ e $f(\theta_1, \theta_2, x) = a(x)$.

Ainda mais:

$$\|f(it_1,it_2,x)\|_{L_X^{P_{00}}(E_{00})} = \left[\int_{X_2} \left(\int_{X_1} \|f(it_1,it_2,x)\|_{E_{00}}^{p_0^1} d\mu_1 \right)^{p_0^2/p_0^1} d\mu_2 \right]^{1/p_0^2}$$

$$\leq \frac{(1+\varepsilon)}{[\,\|a\|_{L_X^P(\mathbb{E}_\Theta)}]^{p^2/p_0^2-1}} \left[\int_{X_2} \left(\int_{X_1} \|a(x)\|_\Theta^{p^1} \|a(x)\|_{L_{X_1}^{p^1}(\mathbb{E}_\Theta)}^{p_0^1 p^2/p_0^2 - p^1} d\mu_1 \right)^{p_0^2/p_0^2} d\mu_2 \right]^{1/p_0^2}$$

$$\leq \frac{(1+\varepsilon)}{[\,\|a\|_{L_X^P(\mathbb{E}_\Theta)}]^{p^2/p_0^2-1}} \left[\int_{X_2} \|a(x)\|_{L_{X_1}^{p^1}(\mathbb{E}_\Theta)}^{p^2} d\mu_2 \right]^{1/p_0^2}$$

$$= (1+\varepsilon)\,\|a\|_{L_X^P(\mathbb{E}_\Theta)} .$$

Analogamente

$$\|f(k+it,x)\|_{L_X^{P_k}(E_k)} \leq (1+\varepsilon)\,\|a\|_{L_X^P(\mathbb{E}_\Theta)} \qquad k \in \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$$

Assim

$$\|f\|_{H[L_X^{P_k}(\mathbb{E}_k),\, k \in \square]} \leq (1+\varepsilon)\,\|a\|_{L_X^P(\mathbb{E}_\Theta)}$$

Como ε é arbitrário e $f(\theta_1,\theta_2,x) = a(x)$ segue que

$$\|a\|_{[L_X^{P_k}(E_k),\; k \in \square]_\Theta} \leq \|a\|_{L_X^P(\mathbb{E}_\Theta)} .$$

A desigualdade contrária segue do teorema 2.4.8. e da desigualdade de Hölder ($p_0^i/p^i(1-\theta^i) > 1$; $p_1^i/p^i\theta^i > 1$; $i = 1,2$).

Com efeito, seja $f(\cdot, x) \in H(\mathbb{E})$ e $f(\Theta, x) = a(x)$ $(x \in X)$. Assim

$$\|a\|_{L_X^P(\mathbb{E}_\Theta)} = \left[\int_{X_2} \left(\int_{X_1} \|a(x)\|_{\mathbb{E}_\Theta}^{p^1} d\mu_1 \right)^{p^2/p^1} d\mu_2 \right]^{1/p^2} \le$$

$$\le \left[\int_{X_2} \left(\int_{X_1} A_{00}^{p^1(1-\theta^1)(1-\theta^2)} A_{10}^{p^1\theta^1(1-\theta^2)} A_{01}^{p^1(1-\theta^1)\theta^2} A_{11}^{p^1\theta^1\theta^2} d\mu_1 \right)^{p^2/p^1} d\mu_2 \right]^{1/p^2}$$

onde $A_k = \dfrac{1}{\Theta(k)} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \|f(k + it, x)\|_{E_k} P_k(\Theta, t)\, dt$ e

$$\Theta(k) = \prod_{j=1}^{2} \left[(1 - k_j) + (-1)^{1-k_j} \theta_j \right], \quad k \in \square .$$

Agrupando os termos e aplicando a desigualdade de Hölder:

$$\int_{X_1} f^{1-\theta^2} g^{\theta^2} d\mu_1 \le \left[\int_{X_1} f\, d\mu_1 \right]^{1-\theta^2} \left[\int_{X_1} g\, d\mu_1 \right]^{\theta^2}$$

teremos:

$$\|a\|_{L^P(\mathbb{E}_\Theta)} \le \left[\int_{X_2} \left(\int_{X_1} A_{00}^{p^1(1-\theta^1)} A_{10}^{p^1\theta^1} d\mu_1 \right)^{p^2(1-\theta^2)/p^1} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_{X_1} A_{01}^{p^1(1-\theta^1)} A_{11}^{p^1\theta^1} d\mu_1 \right)^{p^2\theta^2/p^1} d\mu_2 \right]^{1/p^2}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder

$$(p_0^1 / p^1(1 - \theta^1) > 1; \; p_1^1 / p^1\theta^1 > 1)$$

teremos:

$$\|a\|_{L^P(\mathbb{E}_\Theta)} \leq \Big[\int_{X_2} \Big(\int_{X_1} A_{00}^{p_0^1} d\mu_1 \Big)^{p^2(1-\theta^1)(1-\theta^2)/p_0^1} \times$$

$$\times \Big(\int_{X_1} A_{10}^{p_1^1} d\mu_1 \Big)^{p^2\theta^1(1-\theta^2)/p_1^1} \times \Big(\int_{X_1} A_{01}^{p_0^1} d\mu_1 \Big)^{p^2(1-\theta^1)\theta^2/p_0^1} \times$$

$$\times \Big(\int_{X_1} A_{11}^{p_1^1} d\mu_1 \Big)^{p^2\theta^1\theta^2/p_1^1} d\mu_2 \Big]^{1/p^2}$$

$$= \Big[\int_{X_2} B_{00}^{p^2(1-\theta^1)(1-\theta^2)/p_0^1} \times B_{10}^{p^2\theta^1(1-\theta^2)/p_1^1} \times B_{01}^{p^2(1-\theta^1)\theta^2/p_0^1} \times$$

$$\times B_{11}^{p^2\theta^1\theta^2/p_1^1} d\mu_2 \Big]^{1/p^2}.$$

Agrupando os termos e aplicando a desigualdade de Hölder

$$\int_{X_2} f^{1-\theta^1} g^{\theta^1} d\mu_2 \leq \Big[\int_{X_2} f d\mu_2 \Big]^{1-\theta^1} \Big[\int_{X_2} g d\mu_2 \Big]^{\theta^1}$$

teremos

$$\|a\|_{L^P(\mathbb{E}_\Theta)} \leq \Big[\int_{X_2} B_{00}^{p^2(1-\theta^2)/p_0^1} B_{01}^{p^2\theta^2/p_0^1} d\mu_2 \Big]^{(1-\theta^1)/p^2} \times$$

$$\times \Big[\int_{X_2} B_{10}^{p^2(1-\theta^2)/p_1^1} B_{11}^{p^2\theta^2/p_1^1} d\mu_2 \Big]^{\theta^1/p^2}$$

Aplicando novamente a desigualdade de Hölder

$$(p_0^2 / p^2(1-\theta^2) > 1;\ p_1^2 / p^2\theta^2 > 1)$$

teremos:

$$(1)\quad \|a\|_{L^{P}(\mathbb{E}_{\Theta})} \leq \Big[\int_{X_2} B_{00}^{p_0^2/p_0^1}\, d\mu_2\Big]^{(1-\theta^1)(1-\theta^2)/p_0^2} \times$$

$$\times \Big[\int_{X_2} B_{01}^{p_1^2/p_0^1} d\mu_2\Big]^{(1-\theta^1)\theta^2/p_1^2} \times \Big[\int_{X_2} B_{10}^{p_0^2/p_1^1}\, d\mu_2\Big]^{\theta^1(1-\theta^2)/p_0^2} \times$$

$$\times \Big[\int_{X_2} B_{11}^{p_1^2/p_1^1}\, d\mu_2\Big]^{\theta^1\theta^2/p_1^2}.$$

Analisando separadamente as quatro integrais do segundo membro da desigualdade acima teremos:

$$\Big[\int_{X_2} B_{00}^{p_0^2/p_0^1}\, d\mu_2\Big]^{(1-\theta^1)(1-\theta^2)/p_0^2} =$$

$$= \Big[\int_{X_2} \Big(\int_{X_1} A_{00}^{p_0^1}\, d\mu_1\Big)^{p_0^2/p_0^1} d\mu_2\Big]^{(1-\theta^1)(1-\theta^2)/p_0^2} =$$

$$= \Big\{\int_{X_2} \Big[\int_{X_1} \Big(\frac{1}{(1-\theta_1)(1-\theta_2)} \int_{\mathbb{R}^2} \|f(it_1,it_2;x)\|_{E_{00}} P_{00}(\Theta,t)dt\Big)^{p_0^1} d\mu_1\Big]^{p_0^2/p_0^1} d\mu_2\Big\}^{(1-\theta^1)(1-\theta^2)/p_0^2}.$$

Sendo $d\Theta(t) = \dfrac{1}{(1-\theta^1)(1-\theta^2)} P_{00}(\Theta,t)dt$ e aplicando a desigualdade de Hölder teremos:

$$\Big[\int_{X_2} B_{00}^{p_0^2/p_0^1}\, d\mu_2\Big]^{(1-\theta^1)(1-\theta^2)} \leq$$

$$\leq \left\{ \int_{X_2} \left[\int_{X_1} \frac{1}{(1-\theta^1)(1-\theta^2)} \int_{\mathbb{R}^2} \| f(it_1,it_2;x)\|_{E_{00}}^{p_0^1} P_{00}(\Theta,t)\,dt\,d\mu_1 \right]^{p_0^2/p_0^1} d\mu_2 \right\}^{(1-\theta^1)(1-\theta^2)/p_0^2} .$$

$$= \left[\int_{X_2} \left(\frac{1}{(1-\theta^1)(1-\theta^2)} \int_{\mathbb{R}^2} \| f(it;x_2)\|^{p_0^1}_{L_{X_1}^{p_0^1}(E_{00})} P_{00}(\Theta,t)dt\right)^{p_0^2/p_0^1} d\mu_2 \right\}^{\Theta(0)/p_0^2}$$

$$\leq \left[\int_{X_2} \frac{1}{(1-\theta^1)(1-\theta^2)} \int_{\mathbb{R}^2} \| f(it;x_2)\|^{p_0^2}_{L_{X_1}^{p_0^1}(E_{00})} d\mu_2 \right]^{(1-\theta^1)(1-\theta^2)/p_0^2}$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1-\theta^1)(1-\theta^2)} \| f(it_1,it_2)\|^{p_0^2}_{L_X^{P_{00}}(E_{00})} dt \right]^{(1-\theta^1)(1-\theta^2)/p_0^2}$$

$$\leq \left(\sup_{t\in\mathbb{R}^2} \| f(it_1,it_2)\|_{L_X^{P_{00}}(E_{00})} \right)^{(1-\theta^1)(1-\theta^2)} .$$

Analogamente para as outras integrais do segundo membro da desigualdade (1) teremos:

$$\|a\|_{L_X^P(\mathbb{E}_\Theta)} \leq \prod_{k\in\square} \left(\sup_t \|f(k+it)\|_{L_X^{P_k}(E_k)}\right)^{\Theta(k)} \leq$$

$$\leq \|f\|_{H(L_X^{P_k}(E_k),\,k\in\square)} .$$

Agora, tomando o infimo sobre todas as funções f tais que $f(\Theta,x) = a(x)$ teremos

$$\|a\|_{L^P_X(\mathbb{E}_\Theta)} \leq \|a\|_{[L_k^{P_k}(E_k), k \in \square]_\Theta}.$$

e a demonstração fica completa.

Assim, do teorema 2.5.10. e por aplicações sucessivas do teorema 2.5.5. temos a seguinte proposição:

2.5.11. PROPOSIÇÃO. Seja $\mathbb{E} = \{E_k , k \in \square\}$ uma família admissível de espaços de Banach tal que $\cap\mathbb{E}$ é denso em $E_k, k \in \square$, $\mathbb{P} = (P_k, k \in \square)$ é a família admissível de parâmetros associada a $\mathbb{1} \leq P_{00} = (p_0^1, p_0^2) < P_{11} = (p_1^1, p_1^2) < \infty$ e $0 < \Theta = (\theta_1, \theta_2) < 1$. Então se $\mathbb{E}$ é iterativa e $p_0^2 \geq p_1^1$ temos que a família $\{L^{P_k}(E_k), k \in \square\}$ é iterativa ou seja:

$$[L^{P_k}(E_k), k \in \square]_{\theta_1,\theta_2} = [[L^{P_{00}}(E_{00}), L^{P_{10}}(E_{10})]_{\theta_1}, [L^{P_{01}}(E_{01}), L^{P_{11}}(E_{11})]_{\theta_1}]_{\theta_2},$$

com normas iguais.

2.6. Como vimos anteriormente $H_o(\mathbb{E})$ é o conjunto de todas as funções da forma:

$$(1) \qquad g(z) = [\exp(\delta \sum_{j=1}^{2} z_j^2)] \sum_{j=1}^{N} x_p \exp(\lambda_p \sum_{j=1}^{2} z_j), \quad z = (z_1, z_2),$$

onde $x_p \in \cap\mathbb{E}$, $\lambda_p \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$.

Os dois próximos resultados são devidos a D. L. Fernandez e suas provas podem ser encontradas em [11].

2.6.1. PROPOSIÇÃO. O espaço $H_o(\mathbb{E})$ é um subespaço denso no espaço $H(\mathbb{E})$.

2.6.2. OBSERVAÇÃO. Os elementos x_p podem também ser escolhidos de um conjunto arbitrário M denso em $\cap\mathbb{E}$.

2.6.3. PROPOSIÇÃO. O espaço $\cap\mathbb{E}$ está densamente imerso em qualquer espaço $[\mathbb{E}]_\Theta$, $0 \leq \Theta \leq 1$.

2.6.4. OBSERVAÇÃO. Se $x \in \cap\mathbb{E}$ e $0 < \Theta < 1$ então no cálculo da norma $\|x\|_\Theta$ o infimo pode ser tomado sobre as funções da forma

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n(z)x_n \qquad \text{onde} \qquad x_n \in \cap\mathbb{E},\ a_n \in H(\mathbb{C}).$$

Com efeito, seja $f \in H(\mathbb{E})$ com $f(\Theta) = x$ e $\|f\|_{H(\mathbb{E})} \leq \|x\|_\Theta + \varepsilon$. Sejam $r_1(z)$ e $r_2(z)$ as funções transformando a faixa unitária S_1 conformalmente sobre o disco unitário tal que $r_1(\theta_1) = 0$ e $r_2(\theta_2) = 0$. Assim $|r_j(it)| = |r_j(1 + it)| = 1$, $j = 1,2$.

Consideremos agora a função

$$\varphi(z) = \varphi(z_1,z_2) = [\, f(z) - e^{\delta[(z_1-\theta_1)^2+(z_2-\theta_2)^2]}x] / [r_1(z_1) + r_2(z_2)].$$

Pelo teorema de Hartogs para extensão analítica de funções segue que $\varphi \in H(\mathbb{E})$ e pela Proposição 2.6.1, existe uma função $g(z)$ da forma 2.6(1) tal que $\|\varphi(z) - g(z)\|_{H(\mathbb{E})} < \varepsilon$, ou seja

$$\|[\, f(z) - e^{\delta[(z_1-\theta_1)^2+(z_2-\theta_2)^2]}x]\, r^{-1}(z) - g(z)\|_{H(\mathbb{E})} < \varepsilon$$

onde $r(z) = r_1(z_1) + r_2(z_2)$.

Seja $f_1(z) = e^{\delta[(z_1-\theta_1)^2+(z_2-\theta_2)^2]}x + r(z)g(z)$.

Esta função tem a forma requerida, $f_1(\Theta) = x$ e

$$\|f_1\|_{H(\mathbb{E})} \leq \|f\|_{H(\mathbb{E})} + \|f - f_1\|_{H(\mathbb{E})} \leq \|x\|_\Theta + 3\varepsilon.$$

2.6.5. OBSERVAÇÃO. Segue da Proposição 2.6.3, e da observação anterior que os espaços $[\mathbb{E}]_\Theta$ podem ser definidos do seguinte modo:

Seja $H(\cap\mathbb{E})$ o conjunto de todas as funções f definidas em S_2 com valores em $(\cap\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\cap\mathbb{E}})$, contínuas e limitadas em S_2 em relação a norma de $\cap\mathbb{E}$, holomorfas em $\overset{\circ}{S}_2$ e assim $f(k+it)$ é E_k-contínua e limitada para $k \in \square$.

Para $x \in \cap\mathbb{E}$ consideremos a norma

$$\|x\|'_\Theta = \inf \{\|f\|_{H(\mathbb{E})}, \; f(\Theta) = x, \quad f \in H(\cap\mathbb{E})\}$$

e completamos $\cap\mathbb{E}$ nesta norma.

Segue da Observação 2.6.4, que

$$\|x\|_\theta \leq \|x\|'_\theta \leq \|x\|_\theta .$$

2.7. OS ESPAÇOS EXTREMOS $[\mathbb{E}]_k$, $k \in \square$

Estudaremos agora os espaços extremos $[\mathbb{E}]_k$, $k \in \square$. Se $x \in [\mathbb{E}]_0$, $0 = (0,0)$, então $f(0) = x$ para alguma $f \in H(\mathbb{E})$. Por outro lado $f(it) \in E_0$ para todo t e portanto $f(0) = x \in E_0$. Ainda mais

$$\|f\|_{H(\mathbb{E})} = \max_{k\in\square} \sup_{t\in\mathbb{R}^2} \|f(k+it)\|_{E_k} \geq \|f(0)\|_{E_0} = \|x\|_{E_0} .$$

Logo,

(1) $$\|x\|_{[\mathbb{E}]_o} \geq \|x\|_{E_o}$$

Também, da Proposição 2.6.3, para $\varepsilon > 0$ existe um elemento $x_1 \in \cap\mathbb{E}$ tal que $\|x - x_1\|_{[\mathbb{E}]_o} < \varepsilon$.

Construimos agora as funções

$$f_n(z) = [\exp[(z_1^2 - nz_1) + (z_2^2 - nz_2)]]\, x_1 , \quad z = (z_1, z_2).$$

É claro que $f_n(z) \in H(\mathbb{E})$.

Ainda mais, $f_n(0) = x_1$ e

$$\|f_n\|_{H(\mathbb{E})} = \max\{\|x_1\|_{E_{00}}, e^{1-n}\|x_1\|_{E_{10}}, e^{1-n}\|x_1\|_{E_{01}}, e^{1-n}e^{1-n}\|x_1\|_{E_{11}}\}$$

Como $\|x_1\|_{[\mathbb{E}]_o} \leq \|f_n\|_{H(\mathbb{E})}$ teremos, fazendo n tender a infinito, que

(2) $$\|x_1\|_{[\mathbb{E}]_o} \leq \|x_1\|_{E_o}$$

De (1) obtemos

$$\|x - x_1\|_{E_o} \leq \|x - x_1\|_{[\mathbb{E}]_o} < \varepsilon$$

e assim, de (2) teremos

$$\|x\|_{[\mathbb{E}]_o} \leq \|x_1\|_{[\mathbb{E}]_o} + \varepsilon \leq \|x_1\|_{E_o} + \varepsilon \leq \|x\|_{E_o} + 2\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário e de (1) teremos a igualdade

$$\|x\|_{[\mathbb{E}]_o} = \|x\|_{E_o} \qquad (x \in [\mathbb{E}]_o).$$

Então $[\mathbb{E}]_0$ é isométrico a algum subespaço $\hat{E}_0$ de E_0. Analogamente podemos provar que $[\mathbb{E}]_k$ é um subespaço $\hat{E}_k$ de E_k ($\hat{E}_k \subset E_k$ isometricamente).

Segue da Proposição 2.6.3, que $[\mathbb{E}]_k$, $k \in \square$, coincide com o fecho de $\cap\,\mathbb{E}$ na norma E_k. Em particular, se $\cap\,\mathbb{E}$ é denso em E_k, $k \in \square$, então

$$[\mathbb{E}]_k = E_k, \quad k \in \square$$

Este é o caso, por exemplo, se a família $\mathbb{E}$ é o esqueleto de uma escala múltipla.

2.7.1. OBSERVAÇÃO. Da definição equivalente de $[\mathbb{E}]_\Theta$ dada na Observação 2.6.5, segue que

$$[E_k, k \in \square]_\Theta = [\hat{E}_k, k \in \square]_\Theta$$

e assim, sem perda de generalidade, nós podemos sempre supor que a intersecção dos espaços iniciais é densa em cada um deles.

De outro modo basta observar que $H(\mathbb{E}) = H(\hat{\mathbb{E}})$ pois se $f(z) \in H(\mathbb{E})$ então $f(k+it) \in \hat{E}_k$. A inclusão contrária é imediata. Que as normas destes espaços coincidem segue da igualdade das normas de E_k e $\hat{E}_k$, $k \in \square$.

2.8. COMPLETAMENTO DOS ESPAÇOS $[\mathbb{E}]_\Theta$

Como os espaços $[\mathbb{E}]_\Theta$ estão imersos em $\Sigma\mathbb{E}$ podemos considerar seus completametos $\widetilde{[\mathbb{E}]}_\Theta$ relativo a $\Sigma\mathbb{E}$. Do teorema de interpolação 2.5. e do lema 1.7.7. do capítulo 1 segue imediatamente o teorema seguinte.

2.8.1. TEOREMA. Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ duas famílias admissíveis de espaços de Banach tal que $k > k'$ então $E_k (F_k)$ está imerso em $E_{k'} (F_{k'})$ e $\mathbb{E}_\Theta$ e $\mathbb{F}_\Theta$ os respectivos espaços intermediários. Então o par $(\widetilde{\mathbb{E}}_\Theta, \widetilde{\mathbb{F}}_\Theta)$ é um par de interpolação normalizado do tipo Θ relativo ao par $(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, quando $\mathbb{F}$ é iterativa.

2.9. DUALIDADE

Seja $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach complexos. Vamos assumir que $\cap\mathbb{E}$ é densa em cada um deles. Então os espaços E_k', $k \in \square$, estão imersos em $(\cap\mathbb{E})'$ e portanto $\mathbb{E}' = (E_k', k \in \square)$ é uma família admissível de espaços de Banach. Assim, os espaços de interpolação $[\mathbb{E}']_\Theta$ estão definidos, $0 \leq \Theta = (\theta_1, \theta_2) \leq 1$.

Pela proposição 2.6.3. o espaço $\cap\mathbb{E}$ é denso em $[\mathbb{E}]_\Theta$ e portanto temos a imersão

$$([\mathbb{E}]_\Theta)' = [\mathbb{E}]_\Theta' \subset (\cap\mathbb{E})'$$

Então ambos os espaços $[\mathbb{E}_\Theta']$ e $[\mathbb{E}]_\Theta'$ estão imersos em $(\cap\mathbb{E})'$ e nós estudaremos algumas relações entre eles.

O lema seguinte é um resultado de D.L. Fernandez e sua prova pode ser encontrada em [12].

2.9.1. LEMA. Seja $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach tal que $\cap\mathbb{E}$ é densa em E_k, $k \in \square$ e $\mathbb{E}' = (E_k', k \in \square)$ sua família dual. Então

(1) $$(\cap\mathbb{E})' = \Sigma\mathbb{E}' \quad \text{(isometricamente)}$$

e

(2) $$\|x'\|_{\Sigma\mathbb{E}'} = \sup\{|\langle x, x'\rangle_\cap| / \|x\|_{\cap\mathbb{E}} ; x \in \cap\mathbb{E}\}$$

onde $\langle\ ,\ \rangle_\cap$ denota a dualidade entre $\cap\mathbb{E}$ e $(\cap\mathbb{E})'$.

2.9.2. LEMA. Nas condições do lema anterior temos

(1) $$[\mathbb{E}']_\Theta \subset [\mathbb{E}]'_\Theta$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $u \in [\mathbb{E}']_\Theta$. Então existe uma função $\psi \in H(\mathbb{E}')$ tal que $\psi(\Theta) = u$. A função $\psi(z)$ é holomorfa em $\overset{\circ}{S}_2$ e contínua na norma de $\Sigma\mathbb{E}'$ na faixa S_2. Pelo lema 2.9.1. o espaço $\Sigma\mathbb{E}'$ é isométrico a $(\cap\mathbb{E})'$ e assim $\psi(z)$ é holomorfa em $\overset{\circ}{S}_2$ e contínua em S_2 como função a valores em $(\cap\mathbb{E})'$.

Se uma função $f \in H(\cap\mathbb{E})$ então a função escalar $\langle f(z),\psi(z)\rangle$ é holomorfa em S_2 e pelo princípio do módulo máximo para a polifaixa S_2 temos:

$$|\langle f(z),\psi(z)\rangle| \leq \max_{k\in\square} \sup_{t\in\mathbb{R}^2} \{|\langle f(k+it), \psi(k+it)\rangle|\}$$

$$\leq \max_{k\in\square} \sup_{t\in\mathbb{R}^2} \{\|f(k+it)\|_{E_k} \|\psi(k+it)\|_{E'_k}\}$$

$$\leq \max_{k\in\square} \sup_{t\in\mathbb{R}^2} \{\|f(k+it)\|_{E_k} \|\psi\|_{H(\mathbb{E}')}\}$$

e portanto, para $z \in S_2$, temos

$$|\langle f(z), \psi(z)\rangle| \leq \|f\|_{H(\mathbb{E})} \|\psi\|_{H(\mathbb{E}')}$$

Seja $x \in \cap\mathbb{E}$. Para a função $f_1 \in H(\cap\mathbb{E})$ com $f_1(\Theta) = x$ isto implica que

$$|\langle x,u\rangle| = |\langle f_1(\Theta),\psi(\Theta)\rangle| \leq \|f_1\|_{H(\mathbb{E})} \|\psi\|_{H(\mathbb{E}')} .$$

Tomando o infimo sobre f_1 e ψ obtemos em virtude da Observação 2.6.5 que

$$|\langle x,u\rangle| \leq \|x\|_{[\mathbb{E}]_\Theta} \|u\|_{[\mathbb{E}']_\Theta} \qquad (x \in \cap\mathbb{E}).$$

Esta desigualdade implica que o funcional u como elemento de $(\cap\mathbb{E})'$ pertence ao conjunto $[\mathbb{E}]'_\Theta$ e $\|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta} \leq \|u\|_{[\mathbb{E}']_\Theta}$. O Lema fica então demonstrado.

OBSERVAÇÃO. Pelo Teorema 0.3.6, do Capítulo 0 o espaço $[\mathbb{E}]'_\Theta$ é completo relativamente a $(\cap\mathbb{E})'$. Portanto da imersão 2.9.2(1) segue que

$$(2) \qquad \widetilde{[\mathbb{E}']}_\Theta \overset{1}{\subset} [\mathbb{E}]'_\Theta$$

onde o simbolo $\sim$ é o completamento relativo a $(\cap\mathbb{E})'$.

Nosso propósito agora é mostrar que na inclusão (2) temos a igualdade.

2.9.3. LEMA. Consideremos as funções $\psi(z)$, $(z \in S_2)$ e $\psi_k(t)$, $t \in \mathbb{R}^2$, $k \in \square$, com valores em $\Sigma\mathbb{E}'$ e satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\psi(z)$ é $\Sigma\mathbb{E}'$-limitada e holomorfa em $\overset{\circ}{S}_2$.

(ii) Para todo $x \in \cap\mathbb{E}$ a função $\langle x,\psi(z)\rangle$ é tal que

$$\langle x,\psi(k+it)\rangle = \langle x,\psi_k(t)\rangle, \qquad k \in \square.$$

(iii) $\psi_k(t) \in E'_k$ e $\|\psi_k(t)\|_{E'_k} \leq c$, $\quad k \in \square$.

Então $\psi(\theta) \in \widetilde{[\mathbb{E}']}_\Theta$ e

(1) $$\|\psi(\theta)\|_{\widetilde{[\mathbb{E}']_\Theta}} \leq c.$$

Observe que se $\psi \in H(\mathbb{E}')$ então ψ satisfaz as condições acima e podemos tomar $c = \|\psi\|_{H(\mathbb{E}')}$.

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a função φ definida em S_2 pela expressão

$$\varphi(z_1,z_2) = \int_{1/2}^{z_1}\int_{1/2}^{z_2} \psi(u_1,u_2)du_2du_1 \qquad 0 < \mathrm{Re}\, z_j < 1, \quad j = 1,2.$$

(convergência em $\Sigma\mathbb{E}'$).

Desde que $\psi(z)$ é limitada segue que $\varphi(z)$ pode ser estendida continuamente na norma de $\Sigma\mathbb{E}' = (\cap\mathbb{E})'$ para a faixa S_2.

Agora, para $x \in \cap\mathbb{E}$ e denotando a expressão

$$\langle x,\varphi(z_1 + ih_1,z_2 + ih_2)\rangle - \langle x,\varphi(z_1 + ih_1,z_2)\rangle -$$

$$- \langle x,\varphi(z_1,z_2 + ih_2)\rangle + \langle x,\varphi(z_1,z_2)\rangle \quad \text{por} \quad \langle x,\Delta^{ih}\varphi(z)\rangle$$

teremos

$$\langle x,\Delta^{ih}\varphi(z)\rangle = \int_{z_1}^{z_1+ih_1}\int_{z_2}^{z_2+ih_2} \langle x,\psi(u_1,u_2)\rangle du_2du_1$$

$$= - \int_0^{h_1}\int_0^{h_2} \langle x,\psi(z_1 + is_1,z_2 + is_2)\rangle ds_2ds_1$$

$(0 < \mathrm{Re}\, z_j < 1, \quad j = 1,2.)$

Para $z = (z_1,z_2) = (y_1,y_2) + i(t_1,t_2)$ e fazendo (y_1,y_2) tender a (k_1,k_2), $k_j = 0$ ou 1, $j = 1,2$ teremos:

$$\langle x, \Delta^{ih}\varphi(k + it) \rangle = - \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \langle x, \psi_k(t_1 + s_1, t_2 + s_2) \rangle \, ds_2 ds_1$$

De (iii) a expressão a direita nos dá um funcional linear contínuo sobre E_k cuja norma não excede a ch_1h_2. Portanto

$$\Delta^{ih}\varphi(k + it) \in E_k'$$

e

$$\|[\Delta^{ih}\varphi(k + it)] / h_1h_2\|_{E_k'} \leq c, \qquad k \in \square.$$

Da última desigualdade segue que a função

$$\Phi_h(z) = [\Delta^{ih}\varphi(z)] / h_1h_2$$

pertence a $H(\mathbb{E}')$ e

$$\|\Phi_h(z)\|_{H(\mathbb{E}')} \leq c.$$

Isto implica que

$$\Phi_h(\Theta) \in [\mathbb{E}']_\Theta \quad \text{e} \quad \|\Phi_h(\Theta)\|_{[\mathbb{E}']_\Theta} \leq c$$

Por outro lado, quando h_1 e h_2 tendem sucessivamente a zero temos que $\Phi_h(\Theta)$ converge para $(\partial^2/\partial z_1 \partial z_2)\varphi(\Theta) = \psi(\Theta)$ em $\Sigma\mathbb{E}' = (\cap\mathbb{E})'$ e portanto

$$\psi(\Theta)) \in \widetilde{[\mathbb{E}']}_\Theta \quad \text{e} \quad \|\psi(\Theta)\|_{\widetilde{[\mathbb{E}']}_\Theta} \leq c$$

O lema fica então demonstrado.

2.9.4. TEOREMA. Se $\cap\mathbb{E}$ é denso em E_k, $k \in \square$, então o espaço dual $[\mathbb{E}]_\Theta'$ é isométrico a $\widetilde{[\mathbb{E}']}_\Theta$ quando $\mathbb{E}$ é iterativa.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $u \in [\mathbb{E}]'_\Theta$. Como $[\mathbb{E}]_\Theta = H(\mathbb{E}) / N(\Theta)$, onde $N(\Theta)$ é o núcleo da aplicação que a cada $f \in H(\mathbb{E})$ associa o elemento $f(\Theta)$ em $[\mathbb{E}]_\Theta$, então o funcional u induz um funcional linear $\bar{u}$ sobre $H(\mathbb{E})$ com mesma norma e nulo sobre $N(\Theta)$. Com efeito, basta definir $\bar{u}(f) = u(f(\Theta))$ e teremos:

$$|\bar{u}(f)| = |u(f(\Theta))| \leq \|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta} \|f(\Theta)\|_{[\mathbb{E}]_\Theta} \leq \|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta} \|f\|_{H(\mathbb{E})}$$

ou seja

$$(1) \qquad \|\bar{u}\|_{[H(\mathbb{E})]'} \leq \|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta} .$$

Ainda mais, para $x \in [\mathbb{E}]_\Theta$ e $\varepsilon > 0$ seja a função $f \in H(\mathbb{E})$ tal que $f(\Theta) = x$ e $\|f\|_{H(\mathbb{E})} \leq \|x\|_\Theta + \varepsilon$.

Assim,

$$|u(x)| = |u(f(\Theta))| = |\bar{u}(f)| \leq \|\bar{u}\|_{[H(\mathbb{E})]'} \|f\|_{H(\mathbb{E})} \leq$$

$$\leq \|\bar{u}\|_{[H(\mathbb{E})]'} (\|x\|_\Theta + \varepsilon) .$$

Como ε é arbitrário segue que

$$(2) \qquad \|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta} \leq \|\bar{u}\|_{[H(\mathbb{E})]'} .$$

De (1) e (2) segue a igualdade.

Consideremos agora a transformação T de $H(\mathbb{E})$ em

$$\prod_{k \in \square} L_1(E_k) = L_1(E_{oo}) \times L_1(E_{10}) \times L_1(E_{01}) \times L_1(E_{11})$$

definida por:

$$T(f) = (f(it)P_{oo}(\Theta,t), f((1,0)+it)P_{10}(\Theta,t), f((0,1)+it)P_{01}(\Theta,t),$$

$$f((1,1)+it)P_{11}(\Theta,t)) = (f(k+it)P_k(\Theta,t),\ k\in\Box) =$$

$$= (f_k\ ,\ k\in\Box)$$

onde $P_k(z,y) = \prod_{j=1}^{2} P_{k_j}(z_j,y_j)$, $k\in\Box$, é o k-núcleo de Poisson para polifaixa S_2 e $P_o(z,y)$ e $P_1(z,y)$ são os núcleos de Poisson para a faixa unitária S_1.

É claro que o conjunto imagem de T é um subespaço vetorial de $\prod_{k\in\Box} L_1(E_k)$.

A transformação T é linear e injetora. Na sua imagem definimos um funcional linear S pela fórmula:

$$\langle T(f), S\rangle = \langle f,\bar{u}\rangle$$

Pelo teorema 2.4.9. temos

$$|\langle T(f),S\rangle| = |\langle f,\bar{u}\rangle| = |\langle f(\Theta),u\rangle| \le \|f(\Theta)\|_\Theta \|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta} \le$$

$$\le \left[\sum_{k\in\Box}\int_{\mathbb{R}^2}\|f(k+it)\|_{E_k} P_k(\Theta,t)\,dt\right]\|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta}$$

e portanto

(3) $$|\langle T(f),S\rangle| \le \|T(f)\|_{\prod_{k\in\Box} L_1(E_k)} \|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta}$$

Então na imagem de T o funcional linear S é limitado na norma de $\prod_{k\in\Box} L_1(E_k)$. Portanto S é estendido a um funcional linear contínuo $\bar{S}$, preservando a norma, a todo espaço $\prod_{k\in\Box} L_1(E_k)$.

Agora, do isomorfismo $\Phi(\varphi) = (\varphi_k\,,\ k \in \square)$ onde $\varphi_k(f_k) = \varphi(0,\dots,f_k\,,\dots,0)$ entre os espaços $[\prod_{k\in\square} L^1(E_k)]'$ e $\prod_{k\in\square} [L_1(E_k)]'$ e do teorema sobre a forma geral de um funcional linear sobre $L^1(E)$ ([7], pg. 503) teremos:

$$\overline{S}(T(f)) = \overline{S}(f_k,\ k \in \square) =$$

$$= \overline{S}((f_{oo},0,0,0) + (0,f_{10},0,0) + (0,0,f_{01},0) + (0,0,0,f_{11}))$$

$$= \sum_{k\in\square} \overline{S}(0,\dots,f_k,\dots,0) = \sum_{k\in\square} (\overline{S})_k(f_k)$$

$$= \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} \langle f(k + it)P_k(\Theta,t), \psi_k(t) \rangle\, dt$$

onde $\psi_k(t)$ são funções com valores em E_k', limitadas na norma de E_k' e tal que

$$(4) \qquad \|(\overline{S})_k\|_{[L^1(E_k)]'} = \sup \operatorname{ess} \|\psi_k(t)\|_{E_k'}\ , \qquad k \in \square.$$

Assim,

$$(5) \quad \langle f,\overline{u}\rangle = \langle T(f),\overline{S}\rangle = \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} \langle f(k+it)P_k(\Theta,t), \psi_k(t)\rangle\, dt\ .$$

Ainda mais, de (3) obtemos:

$$|(\overline{S})_k(f_k)| = |\overline{S}(0,\dots,f_k,\dots,0)| \le \|\overline{S}\| \cdot \|(0,\dots,f_k,\dots,0)\|_{\prod_{k\in\square} L^1(E_k)}$$

$$\le \|u\|_{[\mathbb{E}]_\Theta'} \|f_k\|_{L^1(E_k)}$$

e portanto

$$\|(\bar{S})_k\|_{[L^1(E_k)]'} \leq \|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta}$$

e de (4) segue que

(6) $$\max_{k\in\square}\{\sup \text{ess} \|\psi_k(t)\|_{E'_k}\} \leq \|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta} .$$

Seja $x \in \cap\mathbb{E}$. Considere a função complexa $\psi(x,z)$, $z \in S_2$, definida pela integral de Poisson:

(7) $$\psi(x,z) = \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} \langle x,\psi_k(t)\rangle P_k(z,t)dt$$

Esta função é linear em x para cada z fixo e de (6) obtemos:

$$|\psi(x,z)| \leq \max_{k\in\square} \sup \text{ess} |\langle x,\psi_k(t)\rangle|$$

ou seja:

(8) $$|\psi(x,z)| \leq \|x\|_{\cap\mathbb{E}} \|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta} \quad \text{i.é;} \quad \psi_z \in (\cap\mathbb{E})'$$

onde $\psi_z : \cap\mathbb{E} \to \mathbb{C}$ e $\psi_z(x) = \psi(x,z)$.

Podemos então definir o funcional

$$H : S_2 \to (\cap\mathbb{E})' \quad \text{por} \quad H(z) = \psi_z$$

Temos então que $\psi(x,z) = \langle x,H(z)\rangle$.

De (8) segue que $H(z)$ é limitado em S_2 com

$$\|H(z)\|_{\Sigma\mathbb{E}'} \leq \|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta} .$$

Mostraremos agora que $H(z)$ é analitica em $\overset{\circ}{S}_2$.

Consideremos então uma função escalar $h(z_1,z_2)$ analítica em $\overset{\circ}{S}_2$ e contínua em S_2 tendo limites quando $\operatorname{Im}(z_j) \to \pm\infty$, $j = 1,2$, e tal que $h(\theta_1,\theta_2) = 0$.

Em (5) seja $f(z) = h(z)x$. Então

$$0 = \langle h(\Theta)x,u \rangle = \langle f(\Theta),u \rangle = \langle f,\bar{u} \rangle =$$

$$= \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} h(k + it) \langle x,\psi_k(t) \rangle P_k(\Theta,t)dt.$$

Mas pelo critério de analiticidade (Teorema 0.5.8) de funções da forma (7) temos que $\langle x,H(z) \rangle$ é analítica para todo $x \in \cap\mathbb{E}$ e do Teorema 4.4.-F ([32], pg. 205) temos que $H(z)$ é analítica na norma da $(\cap\mathbb{E})' = \Sigma\mathbb{E}'$.

As funções $H(z)$ e $\psi_k(t)$, $k \in \square$, satisfazem as hipóteses do Lema 2.9.3, e portanto

$$H(\Theta) \in \widetilde{[\mathbb{E}']}_\Theta \quad \text{e} \quad \|H(\Theta)\|_{\widetilde{[\mathbb{E}']}_\Theta} \leq \|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta}.$$

Tomando $f(z) = x \in \cap\mathbb{E}$ em (5), por (7) teremos

$$\langle x,u \rangle = \psi(x,\Theta) = \langle x,H(\Theta) \rangle$$

isto é, $H(\Theta) = u$ como um elemento de $(\cap\mathbb{E})'$ e portanto

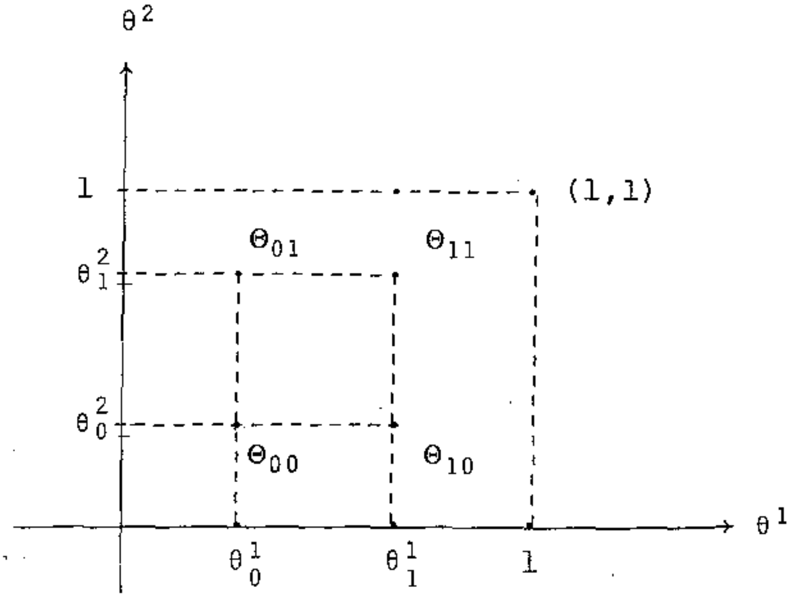
$$u \in \widetilde{[\mathbb{E}']}_\Theta \quad \text{e} \quad \|u\|_{\widetilde{[\mathbb{E}']}_\Theta} \leq \|u\|_{[\mathbb{E}]'_\Theta}.$$

O teorema agora segue em virtude da imersão 2.9.2(2).

2.10. UM TEOREMA DE REITERAÇÃO

Dada uma família de espaços de Banach $\mathbb{E} = (E_k / k \in \square)$ nós construimos os espaços $[\mathbb{E}]_{\Theta_k} = E_{\Theta_k}$, $k \in \square$, onde $0 \le \Theta_{00} <$ $< \Theta_{11} \le 1$.

Lembremos que $\Theta_k = \Theta_{k_1,k_2} = (\theta^1_{k_1}, \theta^2_{k_2})$ e a configuração é a seguinte



Estes espaços formam uma família de espaços de Banach imersos, por exemplo, em $\Sigma\mathbb{E}$.

Denotaremos a família de espaços E_{Θ_k}, $k \in \square$ por $\overline{\mathbb{E}}$, i.é: $\overline{\mathbb{E}} = (E_{\Theta_k}, k \in \square)$.

Portanto, nós podemos construir os espaços $[\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda$, $0 \le \Lambda =$ $= (\lambda^1, \lambda^2) \le 1$.

2.10.1. LEMA. O espaço $[\mathbb{E}]_S$ onde $s^j = (1 - \lambda^j)\theta^j_o + \lambda^j \theta^j_1$ está imerso em $[\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda$ com constante de imersão menor ou igual a 1.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in [\mathbb{E}]_S$ e tomemos uma função $f \in H(\mathbb{E})$ com $f(S) = x$. Considere agora a função

$$g(z_1,z_2) = f((1 - z_1)\theta^1_o + z_1\theta^1_1,\ (1 - z_2)\theta^2_o + z_2\theta^2_1)$$

Então,

(1) $$g(\lambda^1,\lambda^2) = f(s^1,s^2) = x$$

e

$$g(k + it) = f(\Theta_k + i(\Theta_{11} - \Theta_{oo})t) =$$

$$= f(\theta^1_{k_1} + i(\theta^1_1 - \theta^1_o)t^1,\ \theta^2_{k_2} + i(\theta^2_1 - \theta^2_o)t^2).$$

A função $f_t(z) = f(z + i(\Theta_{11} - \Theta_{oo})t)$ pertence a $H(\mathbb{E})$ para todo t fixo e como $f_t(\Theta_k) = g(k + it)$ temos que:

(2) $$g(k + it) \in E_{\Theta_k}\ ,\quad k \in \square$$

e

(3) $$\| g(k + it)\|_{E_{\Theta_k}} \leq \| f_t\|_{H(\mathbb{E})} = \| f\|_{H(\mathbb{E})}.$$

Veremos agora que $g \in H(\overline{\mathbb{E}})$. Como $g : S_2 \to \Sigma\mathbb{E}$ é analítica em $\overset{o}{S}_2$, contínua e limitada em S_2 então para todo funcional linear contínuo definido em $\Sigma\mathbb{E}$ temos que $L(g(z))$ é contínuo e limitado em S_2, analítico em $\overset{o}{S}_2$ e portanto representável como a integral de Poisson de seus valores na fronteira reduzida $F = \{z \in S_2 \mid z = k + it,\ k \in \square\}$.

Agora, seja $P_k (k \in \square)$ o k-núcleo de Poisson para a faixa S_2 e consideremos a função

$$h(z) = \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} g(k + it)P_k(z,t)dt.$$

De (2) e (3) temos que $h : S_2 \to \Sigma\overline{\mathbb{E}}$ é $\Sigma\overline{\mathbb{E}}$ contínua e limitada.

Agora, para todo $L \in (\Sigma\mathbb{E})'$ temos

$$L(h(z)) = \sum_{k\in\square} \int_{\mathbb{R}^2} L(g(k+it))P_k(z,t)dt.$$

Como $L(g(z))$ é representável como a integral de Poisson de seus valores na fronteira reduzida obtemos que $L(h(z)) = L(g(z))$ para todo $L \in (\Sigma\mathbb{E})'$. Portanto $h(z) = g(z)$ acarretando que g é $\Sigma\overline{\mathbb{E}}$ contínua e limitada.

Agora, da continuidade da função g em $\Sigma\overline{\mathbb{E}}$ segue que a função φ definida pela expressão

$$\varphi(z) = \varphi(z_1,z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c_1}\int_{c_2} \frac{g(u_1,u_2)}{(u_1-z_1)(u_2-z_2)}\, du_2 du_1$$

é analítica (na norma de $\Sigma\overline{\mathbb{E}}$) em $D_1 \times D_2$ onde D_j, $j = 1,2$, é o disco aberto limitado pela circunferência c_j e c_j está contido no interior da faixa unitária S_1.

Desde que $L(g(z))$ é analítica em $\overset{o}{S}_2$ obtemos para todo $L \in (\Sigma\mathbb{E})'$ que:

$$L(g(z) - \varphi(z)) = L(g(z)) - L(\varphi(z)) =$$

$$= L(g(z)) - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c_1}\int_{c_2} \frac{L(g(u_1,u_2))}{(u_1-z_1)(u_2-z_2)}\, du_2 du_1 = 0$$

e portanto $g(z) = \varphi(z)$ para todo $z \in D_1 \times D_2$, ou seja, g é analítica em $D_1 \times D_2$ e portanto g é analítica em $\overset{o}{S}_2$ (na norma de $\Sigma\overline{\mathbb{E}}$).

Assim, $g \in H(\overline{\mathbb{E}})$ e de (1) e (3) temos que

$$x \in [\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda \quad \text{e}$$

$$\|x\|_{[\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda} \leq \|g\|_{H(\overline{\mathbb{E}})} = \max_{k\in\square} \sup_{t\in\mathbb{R}^2} \{\|g(k+it)\|_{E_{\Theta_k}}\} \leq \|f\|_{H(\mathbb{E})}.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as funções f tal que $f(S) = x$ teremos

$$\|x\|_{[\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda} \leq \|x\|_{[\mathbb{E}]_S}.$$

Obtemos assim que:

(4) $$[\mathbb{E}]_S \overset{1}{\subset} [\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda$$

onde o simbolo $\overset{1}{\subset}$ significa que a constante de imersão é menor ou igual a 1. O lema fica então demonstrado.

Estamos agora interessados nas condições sob as quais tenhamos a inclusão contraria em (4). Para isto estudaremos o problema da imersão dos espaços duais dos espaços considerados neste lema. Entretanto se o espaço $[\mathbb{E}]_S$ não é denso em $[\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda$ então o espaços duais não estão imersos. Então assumiremos a hipótese adicional que $\cap\mathbb{E}$ é denso nos espaços E_k, $k \in \square$ e também no espaço $\cap\overline{\mathbb{E}}$.

Pela Proposição 2.6.3, o espaço $\cap\overline{\mathbb{E}}$ é denso em $[\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda$ e portanto $\cap\mathbb{E}$ e $[\mathbb{E}]_S$ estão densamente imersos em $[\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda$.

Temos então $\cap\mathbb{E} \subset [\mathbb{E}]_S \subset [\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda$ com imersões densas e então os duais dos espaços considerados estão imersos em $(\cap\mathbb{E})' = \Sigma\mathbb{E}'$.

2.10.2. LEMA. Se $\cap\mathbb{E}$ é denso em E_k, $k \in \square$, e em $\cap\overline{\mathbb{E}}$ então os espaços $([\mathbb{E}]_S)'$ e $([\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda)'$ coincidem quando $\mathbb{E}$ é iterativa.

DEMONSTRAÇÃO: A imersão 2.10.1(4) implica a imersão

$$[\overline{\mathbb{E}}]'_\Lambda \overset{1}{\subset} [\mathbb{E}]'_S.$$

Agora, pelo Teorema 2.9.4, o espaço $[\overline{\mathbb{E}}]'_{\Lambda}$ coincide, isometricamente, com $\widetilde{[\overline{\mathbb{E}}']}_{\Lambda}$ onde o simbolo $\widetilde{\ }^{-}$ significa o completamento relativo a $(\cap\overline{\mathbb{E}})' = \Sigma\overline{\mathbb{E}}'$, ou seja:

(1) $$[\overline{\mathbb{E}}]'_{\Lambda} = \widetilde{[\overline{\mathbb{E}}']}_{\Lambda}$$

Como $\cap\mathbb{E}$ é denso em $[\overline{\mathbb{E}}]_{\Lambda}$ então pelo Teorema 0.3.6, temos que

(2) $$[\overline{\mathbb{E}}]'_{\Lambda} = \widetilde{[\overline{\mathbb{E}}]}'_{\Lambda}$$

onde $\sim$ significa o completamento relativo a $(\cap\mathbb{E})' = \Sigma\mathbb{E}'$. Temos também $[\overline{\mathbb{E}}']_{\Lambda} \subset \Sigma\overline{\mathbb{E}}' \subset \Sigma\mathbb{E}'$ e usando (1) e (2) teremos pelo Corolário 0.2.7 que

(3) $$[\overline{\mathbb{E}}]'_{\Lambda} = \widetilde{[\overline{\mathbb{E}}']}_{\Lambda}$$

Pelo Lema 2.10.1, temos:

(4) $$[\mathbb{E}']_S \overset{1}{\subset} [[\mathbb{E}']_{\Theta_k}, k \in \square]_{\Lambda}.$$

Ainda mais, do Teorema 2.9.4, obtemos

$$[\mathbb{E}']_{\Theta_k} \overset{1}{\subset} \widetilde{[\mathbb{E}']}_{\Theta_k} = [\mathbb{E}]'_{\Theta_k}$$

e de (4) temos que:

(5) $$[\mathbb{E}']_S \overset{1}{\subset} [[\mathbb{E}]'_{\Theta_k}, k \in \square]_{\Lambda} = [\overline{\mathbb{E}}']_{\Lambda}.$$

Tomando o completamento relativo a $\Sigma\mathbb{E}'$ em (5) obtemos

$$\widetilde{[\mathbb{E}']}_S \overset{1}{\subset} \widetilde{[\overline{\mathbb{E}}']}_{\Lambda}$$

e usando o Teorema 2.9.4 e a igualdade (3) temos

$$[\mathbb{E}]'_S \overset{1}{\subset} [\overline{\mathbb{E}}]'_\Lambda .$$

Como a imersão contrária foi obtida no início desta demonstração o lema fica então provado.

2.10.3. TEOREMA. Se $\cap\mathbb{E}$ é denso em E_k, $k \in \square$, e em $\cap\overline{\mathbb{E}}$, então os espaços $[\mathbb{E}]_S$, onde $s^j = (1-\lambda^j)\theta_0 + \lambda^j\theta_1^j$, e $[\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda$ $(0 \leq \Lambda \leq 1)$ coincidem isometricamente quando $\mathbb{E}$ é iterativa.

DEMONSTRAÇÃO. Como $[\mathbb{E}]'_S = [\overline{\mathbb{E}}]'_\Lambda$ isometricamente, temos, para $x \in [\mathbb{E}]_S$; que $\|x\|_S = \|x\|_\Lambda$. Com efeito:

$$\|x\|_\Lambda = \sup\{|Tx|,\ T \in [\overline{\mathbb{E}}]'_\Lambda,\ \|T\|_{[\overline{\mathbb{E}}]'_\Lambda} = 1\}$$

e

$$\|x\|_S = \sup\{|Gx|,\ G \in [\mathbb{E}]'_S,\ \|G\|_{[\mathbb{E}]'_S} = 1\}$$

onde $G = T/_{[\mathbb{E}]_S}$.

Logo, em $[\mathbb{E}]_S$ as normas $\|\cdot\|_S$ e $\|\cdot\|_\Lambda$ são iguais e como $[\mathbb{E}]_S$ é denso em $[\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda$ temos que estes dois espaços coincidem.

2.11. CONEXÃO COM A TEORIA DAS ESCALAS

2.11.1. Consideremos agora uma família iterativa de espaços de Banach $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ tal que se $k \geq k'$ então E_k está normalmente imerso em $E_{k'}$, isto é, E_k é denso em $E_{k'}$ e a constante de imersão não excede 1.

Neste caso $\cap\mathbb{E} = E_{11}$ e $\Sigma\mathbb{E} = E_{00}$ isometricamente.

Consideremos, para $0 \leq \Theta = (\theta^1,\theta^2) \leq 1$, os espaços

$$[\mathbb{E}]_\Theta = E_\Theta = \{x \in E_{oo} \ / \ x = f(\Theta),\ f \in H(\mathbb{E})\}.$$

Pelo princípio do módulo máximo para a faixa S_2 obtemos, para $f \in H(\mathbb{E})$, que:

$$\|f(z)\|_{E_{oo}} \leq \max_{k \in \square} \sup_{t \in \mathbb{R}^2} \|f(k + it)\|_{E_{oo}}$$

$$\leq \max_{k \in \square} \sup_{t \in \mathbb{R}^2} \|f(k + it)\|_{E_k} = \|f\|_{H(\mathbb{E})}$$

ou seja

(1) $$\|f(z)\|_{E_{oo}} \leq \|f\|_{H(\mathbb{E})}\ .$$

Mostraremos que para $\alpha = (\alpha^1,\alpha^2) < \beta = (\beta^1,\beta^2)$ o espaço $E_\beta = [\mathbb{E}]_\beta$ está normalmente imerso em $E_\alpha = [\mathbb{E}]_\alpha$.

Seja $x \in [\mathbb{E}]_\beta$. Então existe uma função $f \in H(\mathbb{E})$ tal que

$$\|f\|_{H(\mathbb{E})} \leq \|x\|_{E_\beta} + \varepsilon \quad \text{e} \quad f(\beta) = x.$$

Consideremos a função

$$\Phi(z_1,z_2) = f\left(\frac{1-\beta^1}{1-\alpha^1} z_1 + \frac{\beta^1-\alpha^1}{1-\alpha^1},\ \frac{1-\beta^2}{1-\alpha^2} z_2 + \frac{\beta^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)$$

Esta função é holomorfa em $\overset{o}{S}_2$ e contínua em S_2. Ainda mais, de (1) obtemos

$$\|\Phi(it^1,it^2)\|_{E_{oo}} = \|f(\lambda^1 + i(1-\lambda^1)t^1,\ \lambda^2 + i(1-\lambda^2)t^2)\|_{E_{oo}} \leq$$

$$\leq \|f\|_{H(\mathbb{E})}$$

onde $\lambda^1 = (\beta^1 - \alpha^1)/(1 - \alpha^1)$ e $\lambda^2 = (\beta^2 - \alpha^2)/(1 - \alpha^2)$. Também

$$\|\phi(1 + it^1, 1 + it^2)\|_{E_{11}} = \|f(1 + i(1 - \lambda^1)t^1, 1 + i(1 - \lambda^2)t^2)\|_{E_{11}}$$

$$\leq \|f\|_{H(\mathbb{E})} .$$

Agora,

$$\Phi(it^1, 1 + it^2) = f(\lambda^1 + i(1 - \lambda^1)t^1,\ 1 + i(1 - \lambda^2)t^2)$$

e para cada t fixo, a função

$$h(z_1, z_2) = f(1 - \lambda^1)z_1 + \lambda^1 + i(1 - \lambda^1)t^1,\ z_2 + i(1 - \lambda^2)t^2)$$

pertence a $H(\mathbb{E})$ e $h(0,1) = \phi(it^1, 1 + it^2)$. Assim

$$\phi(it^1, 1 + it^2) \in [\mathbb{E}]_{01}$$

e como $\cap \mathbb{E} = E_{11}$ é denso em E_k, $k \in \square$ temos pelo §2.7, que $[\mathbb{E}]_{01} = E_{01}$. Ainda mais

$$\|\phi(it^1, 1 + it^2)\|_{E_{01}} \leq \|f\|_{H(\mathbb{E})}$$

Analogamente $\|\phi(1 + it^1, it^2)\|_{E_{10}} \leq \|f\|_{H(\mathbb{E})}$.

Ainda mais $\Phi(\alpha) = f(\beta) = x$ e portanto $x \in [\mathbb{E}]_\alpha$ e

$$\|x\|_{[\mathbb{E}]_\alpha} \leq \|\phi\|_{H(\mathbb{E})} \leq \|f\|_{H(\mathbb{E})} \leq \|x\|_{[\mathbb{E}]_\beta} + \varepsilon .$$

Como ε é arbitrário temos

$$\|x\|_{E_\alpha} \leq \|x\|_{E_\beta} \qquad (x \in E_\beta)$$

e desde que E_1 é denso em todos os espaços $[\mathbb{E}]_\alpha$ segue que o espaço E_β está normalmente imerso em E_α.

Lembremos que os espaços $[\mathbb{E}]_k$, $k \in \square$, coincidem com os espaços E_k pois $\cap \mathbb{E} = E_{11}$ é denso em E_k, $k \in \square$.

Agora, para $x \in E_1$ temos, pelo Teorema 2.4.8, aplicado à função $f(z) = x$ que

$$(2) \quad \|x\|_{[\mathbb{E}]_\alpha} \leq \|x\|_{E_{00}}^{(1-\alpha^1)(1-\alpha^2)} \|x\|_{E_{01}}^{(1-\alpha^1)\alpha^2} \|x\|_{E_{10}}^{\alpha^1(1-\alpha^2)} \|x\|_{E_{11}}^{\alpha^1\alpha^2}$$

Seja $0 \leq \alpha_{00} = (\alpha_0^1, \alpha_0^2) < \beta = (\beta^1, \beta^2) < \alpha_{11} = (\alpha_1^1, \alpha_1^2) \leq 1$. Pelo Teorema 2.10.3, o espaço $[\mathbb{E}]_\beta$ coincide isometricamente com $[\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda$, $\Lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, onde

$$\overline{\mathbb{E}} = \{[\mathbb{E}]_{\alpha_k}, \ k \in \square\} \quad \text{e} \quad \lambda^j = (\beta^j - \alpha_0^j)/(\alpha_1^j - \alpha_0^j).$$

Aplicando (2) para $[\mathbb{E}]_{\alpha_k}$, $k \in \square$, teremos para $x \in E_{\alpha_{11}}$ que

$$\|x\|_{[\mathbb{E}]_\beta} = \|x\|_{[\overline{\mathbb{E}}]_\Lambda} \leq \|x\|_{E_{\alpha_{00}}}^{(1-\lambda^1)(1-\lambda^2)} \|x\|_{E_{\alpha_{01}}}^{(1-\lambda^1)\lambda^2} \|x\|_{E_{\alpha_{10}}}^{\lambda^1(1-\lambda^2)} \|x\|_{E_{\alpha_{11}}}^{\lambda^1\lambda^2}$$

$$= \|x\|_{E_{\alpha_{00}}}^{[(\alpha_1^1-\beta^1)/(\alpha_1^1-\alpha_0^1)]\times(\alpha_1^2-\beta^2)/(\alpha_1^2-\alpha_0^2)} \|x\|_{E_{\alpha_{01}}}^{[(\alpha_1^1-\beta^1)/(\alpha_1^1-\alpha_0^1)]\times(\beta^2-\alpha_0^2)/(\alpha_1^2-\alpha_0^2)} \times$$

$$\times \|x\|_{E_{\alpha_{10}}}^{[(\beta^1-\alpha_0^1)/(\alpha_1^1-\alpha_0^1)]\times(\alpha_1^2-\beta^2)/(\alpha_1^2-\alpha_0^2)} \|x\|_{E_{\alpha_{11}}}^{[(\beta^1-\alpha_0^1)/(\alpha_1^1-\alpha_0^1)]\times(\beta^2-\alpha_0^2)/(\alpha_1^2-\alpha_0^2)}$$

Então os espaços $\{[\mathbb{E}]_\alpha, \ 0 \leq \alpha \leq 1\}$ formam uma escala normal relativa ao esqueleto $\mathbb{E} = (E_k, \ k \in \square)$.

OBSERVAÇÃO. Os espaços $[\mathbb{E}'_k, \ k \in \square]_\alpha = [\mathbb{E}']_\alpha$ também formam uma escala normal. Pelo § 2.7, temos que $[\mathbb{E}']_1$ é o fecho de

E'_o na norma de E'_1. Pelo Teorema 2.9.4 os espaços $[\mathbb{E}]'_\alpha$ coincide com o completamento dos espaços $[\mathbb{E}']_\alpha$ relativo a E'_1, ou o que é o mesmo, relativo ao subespaço $[\mathbb{E}']_{-1}$ de E'_1. Então a família $[\mathbb{E}]'_\alpha$ coincide com a condensação da escala normal $[\mathbb{E}']_\alpha$ (veja § 1.5). Das Proposições 1.5.1 a 1.5.5 segue que $\|f\|_{[\mathbb{E}]'_\alpha}$ é uma função decrescente e "logaritmicamente convexa" de α (Proposição 1.5.5). Em particular, $\|f\|_{[\mathbb{E}]'_\alpha}$ é continua em $\alpha = (1,1)$. Veremos agora que

$$\underline{\lim}_{\alpha \to (1.1)} \|x\|_{[\mathbb{E}]_\alpha} = \|x\|_{E^{01}} \quad (x \in E_{11})$$

Com efeito, do Corolário 0.3.2(1) temos

$$\|x\|_{E^{01}} = \sup_{f \in E'_o} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'_1}}$$

Escolhemos $f_o \in E'_o$ tal que

$$\|x\|_{E^{01}} \leq |f_o(x)| \; / \; \|f_o\|_{E'_1} + \varepsilon.$$

Usando a continuidade de $\|f_o\|_{[\mathbb{E}]'_\alpha}$ em $\alpha = (1,1)$ temos

$$\|x\|_{E^{01}} \leq |f_o(x)| \; / \; \|f_o\|_{[\mathbb{E}]'_\alpha} + 2\varepsilon \leq \|x\|_{[\mathbb{E}]_\alpha} + 2\varepsilon \quad (|\alpha - 1| < \delta).$$

Isto implica que

$$\|x\|_{E^{01}} \leq \underline{\lim}_{\alpha \to (1,1)} \|x\|_{[\mathbb{E}]_\alpha}.$$

Pelo Lema 1.4.2 a desigualdade inversa vale e portanto

$$\underline{\lim}_{\alpha \to (1,1)} \|x\|_{[\mathbb{E}]_\alpha} = \|x\|_{E^{01}}.$$

Logo a escala $\{[\mathbb{E}]_\alpha \ , \ 0 \le \alpha \le 1\}$ não é, em geral, uma escala normal contínua.

2.11.2. APLICAÇÃO. OS ESPAÇOS DE BESSEL NIKOL'SKII OBTIDOS DA INTERPOLAÇÃO COMPLEXA DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV-NIKOL'SKII

Nós lembraremos a definição e algumas propriedades dos espaços de Sobolev-Nikol'skii e Bessel-Nikol'skii. Para uma melhor explanação ver [14].

2.11.2.1. No que segue nós trabalharemos com funções localmente integraveis em $\mathbb{R}^2$ e as derivadas serão sempre tomadas no sentido do fraco. Os espaços $L^P = L^P(\mathbb{R}^2)$, $1 \le P = (p_1,p_2) \le \infty$ são os espaços L^P com normas mistas de Benedek-Panzone [1].

Seja $M = (m_1,m_2) \in \mathbb{N}^2$ e $1 \le P \le \infty$.

Nós definimos o espaço de Sobolev-Nikol'skii $W^{M,P}$ por

(1) $$W^{M,P} = W^{M,P}(\mathbb{R}^2) = \{f \in L^P \ / \ D^\alpha f \in L^P, \quad \alpha \le M\}$$

onde $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2) \le M = (m_1,m_2)$ se $\alpha_j \le m_j$, $j = 1,2$.

Munido da norma

(2) $$\|f\|_{W^{M,P}} = \|f\|_{M,P} = \sum_{\alpha \le M} \|D^\alpha f\|_{L^P}$$

os espaços $W^{M,P}$ são completos.

Vamos denotar o espaço das distribuções temperadas por $S' = S'(\mathbb{R}^2)$ e a transformada direta e inversa de Fourier de $u \in S'$ por $\hat{u} = Fu$ e $\tilde{u} = \bar{F}u$, respectivamente.

Seja $S = (s_1,s_2) \in \mathbb{R}^2$ e segundo Lizorkin-Nikol'skii [25] vamos considerar o seguinte operador em S':

(3) $$J^S u = \overline{F} \prod_{j=1}^{2} (1 + |\cdot|^2)^{s_j/2} Fu$$

2.11.2.2. PROPOSIÇÃO. Se $S = (s_1, s_2) > 0$ e $1 \leq P = (p_1, p_2) \leq \infty$ o operador J^{-S} é um isomorfismo de $L^P(\mathbb{R}^2)$ em $L^P(\mathbb{R}^2)$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [14].

2.11.2.3. Vamos introduzir agora os espaços de Bessel'Nikol'skii (também chamados espaços de potencial) $H^{S,P}$ e estabelecer algumas de suas propriedades.

Seja $S = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ e $1 \leq P = (p_1, p_2) \leq \infty$. Nós definimos $H^{S,P} = H^{S,P}(\mathbb{R}^2)$ como o espaço de todos os elementos $u \in S'$ tais que $J^S u \in L^P$.

Ainda mais, com a norma

(1) $$\|u\|_{H^{S,P}} = \|u\|_{S,P} = \|J^S u\|_{L^P}$$

o espaço vetorial $H^{S,P}$ é um espaço de Banach.

2.11.2.4. PROPOSIÇÃO. Se $S_1 = (s_1^1, s_2^1) \leq S_2 = (s_1^2, s_2^2)$ temos

(1) $$H^{S_2,P} \subset H^{S_1,P} .$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [14].

2.11.2.5. INTERPOLAÇÃO DOS ESPAÇOS DE BESSEL-NIKOL'SKII.

Nós agora determinaremos os espaços de interpolação entre quatro espaços de Bessel-Nikol'skii pelo método complexo.

2.11.2.6. PROPOSIÇÃO. Sejam $1 \leq P_o = (p_1^o, p_2^o)$, $P_1 = (p_1^1, p_2^1) \leq \infty$, $S_o = (s_1^o, s_2^o)$, $S_1 = (s_1^1, s_2^1)$ em $\mathbb{R}^2$ e seja $P_k = (p_1^{k_1}, p_2^{k_2})$, $S_k = (s^{k_1}, s^{k_2})$, $k = (k_1, k_2) \in \square$. Então, se $0 < \Theta = (\theta_1, \theta_2) < 1$ temos:

$$(1) \qquad [H^{S_k,P_k} / k \in \square]_\Theta = H^{S,P}$$

onde $S = (s_1, s_2)$ e $P = (p_1, p_2)$ são definidos por

$$s_j = (1-\theta_j)s_j^o + \theta_j s_j^1 \quad \text{e} \quad 1/p_j = (1-\theta_j)/p_j^o + \theta_j/p_j^1, \; j = 1,2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [14].

Desde que $H^{M,P} = W^{M,P}$, para $M \in \mathbb{N}^2$, teremos então o seguinte corolário:

2.11.2.7. Nas condições da proposição anterior com $S_o = M_o \in \mathbb{N}^2$ e $S_1 = M_1 \in \mathbb{N}^2$ temos:

$$(1) \qquad [W^{M_k,P_k}, k \in \square]_\Theta = H^{S,P}$$

onde $S = (s_1, s_2)$ e $P = (p_1, p_2)$ são definidos por

$$s_j = (1-\theta_j)m_j^o + \theta_j m_j^1 \quad \text{e} \quad 1/p_j = (1-\theta_j)/p_j^o + \theta_j/p_j^1, \qquad j = 1,2.$$

OBSERVAÇÃO. Deste modo fica então caracterizado os espaços de Bessel-Nikol'skii como espaços de interpolação complexa entre quatro espaços de Sobolev-Nikol'skii.

Pelo que vimos no § 2.7, temos que para $\Theta = k$

$$[W^{M_k,P}, k \in \square]_k = W^{M_k,P} = H^{M_k,P}$$

pois para P fixo temos que $W^{M_1,P} \subset W^{M_2,P}$ se $M_1 > M_2$, com imersão densa já que as funções infinitamente deriváveis de decrescimento rápido é denso em qualquer espaço $W^{M,P}$.

Ainda mais, pelo que vimos em § 2.11, os espaços $H^{S,P}$, P fixo, $M_o \leq S \leq M_1$, é uma escala normal relativa ao esqueleto

$$W = (W^{M_k,P}, k \in \square).$$

2.12. ESCALA ANALÍTICA DE ESPAÇOS

Seja E um espaço vetorial normado e $T(z) : E \to E$, $z = (z_1, z_2)$, uma família de operadores lineares satisfazendo as seguintes condições:

1. Para cada $x \in E$ a função $T(z)x$ é uma função inteira da variável complexa $z = (z_1, z_2)$.

2. A função $\|T(z)x\|_E$ é limitada em toda faixa $\alpha_0 \leq Re(z) \leq \beta_0$.

3. $T(0)x = x$.

4. Para cada $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$, $\beta = (\beta^1, \beta^2)$ temos

$$\sup_{t,y \in \mathbb{R}^2} \|T(\alpha + it)T(\beta + iy)x\|_E \leq \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^2} \|T(\alpha + \beta + i\sigma)x\|_E$$

5. $T(iy)\dfrac{T(z_1 + \Delta z_1, z_2)x - T(z_1, z_2)x}{\Delta z_1}$ converge (em E) para $T(iy) \dfrac{\partial}{\partial z_1} [T(z)x]$ quando $\Delta z_1 \to 0$ uniformemente em y.

A mesma condição vale para a variável z_2.

A condição 5, segue da condição 1, se os operadores $T(iy)$

são uniformemente limitados em norma.

A função

$$\|x\|_\alpha = \sup_{t \in \mathbb{R}^2} \|T(\alpha + it)x\|_E \quad , \quad x \in E$$

é uma norma em E.

Basta mostrar que $\|x\|_\alpha = 0 \Rightarrow x = 0$ pois as outras condições são imediatas.

Para $\alpha = 0$ segue da condição 3, que $\|x\|_o = 0 \Rightarrow x = 0$.

Se $\alpha \neq 0$ e $\|x\|_\alpha = 0$ segue que $\|T(\alpha + it)x\|_E = 0$ para todo t. Assim

$$T(\alpha^1 + it^1), \alpha^2 + it^2)x = 0 \quad \text{para todo} \quad (t^1,t^2) \in \mathbb{R}^2 .$$

Para cada t^2 a função $T(\alpha^1 + it^1, \alpha^2 + it^2)x$ é analítica em $z_1 = (\alpha^1 + it^1)$ e $T(\alpha^1 + it^1, z_2)x = 0$ para todo t_1. Como os zeros de uma função analítica de uma variável complexa são isolados temos que $T(z_1, z_2)x = 0$ para todo z_1. Em particular $T(0,z_2)x = 0$. O mesmo argumento na variável z_2 nos mostra que $T(0,0)x = 0$ e da condição 3, temos que $x = 0$.

Agora, completamos os espaços $(E, \|\cdot\|_\alpha)$ e obtemos assim uma família de espaços de Banach E_α, $-\infty < \alpha < +\infty$, chamada "escala" analítica de espaços com base E.

Pelo teorema das 3 retas para a função logaritmicamente subharmonica $\|T(z)x\|_E$ ([7] pg. 521) temos que a função $\|x\|_\alpha$ é logaritmicamente convexa de α e portanto para $\alpha_{oo} \leq \beta_{oo} < \gamma < \beta_{11} \leq \alpha_{11}$ teremos que

$$(1) \qquad \|x\|_{E_\gamma} \leq \prod_{k \in \square} \|x\|_{E_{\beta_k}}^{u(k)}$$

onde $\sum_{k\in\square} u(k) = 1$ e $u(k) = \prod_{j=1}^{2} u_{k_j}^{j}$ como na definição 1.1.1.

Se, ainda mais, $\|x\|_{E_\alpha}$ $(x \in E)$ é uma função crescente de α então, de (1) segue que a condição Π) da propriedade 1.2.4 é satisfeita e a "escala" analítica é uma escala normal contínua em qualquer quadrado pivoteado por α_o e β_o.

A condição 4, pode ser escrita na seguinte forma:

$$\|T(\beta + iy)\,x\|_{E_\alpha} \leq \|x\|_{\alpha+\beta}\,. \tag{2}$$

Finalmente, da condição 3, segue que

$$\|x\|_{E} = \|T(0)\,x\|_{E} \leq \|x\|_{E_o}\,. \tag{3}$$

2.12.1. TEOREMA. Seja E_α uma escala analítica de base M tal que se $k \geq k'$ então E_k está normalmente imerso em $E_{k'}$, $k \in \square$, e seja $\mathbb{E} = (E_k\,, k \in \square)$. Então os espaços $[\mathbb{E}]_\alpha$ construidos da família $\mathbb{E}$ coincidem isometricamente com E_α para $0 \leq \alpha = (\alpha^1,\alpha^2) \leq 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in M$. Pela condição 5, o funcional linear $T(z)x$ é analítico na norma de E_o e portanto a função $f(z) = T(\alpha - z)x$ é analítica na norma de E_o.

Agora, da condição 4, temos

$$\|f(z)\|_{E_o} = \|T(\alpha - z)x\|_{E_o} = \sup_{t\in\mathbb{R}^2} \|T(it)T(\alpha - z)x\|_M \leq$$

$$\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^2} \|T(\alpha - \mathrm{Re}\,z + iy)x\|_M = \|x\|_{\alpha - \mathrm{Re}\,z} \leq$$

$$\leq \max\{\|x\|_{E_\alpha}, \|x\|_{E_{\alpha-1}}, \|x\|_{E_{(\alpha^1,\alpha^2-1)}}, \|x\|_{E_{(\alpha^1-1,\alpha^2)}}\}$$

para $0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$ e assim $\|f(z)\|_{E_o}$ é limitada em S_2.

Ainda mais, de 2.12(2) segue que na fronteira reduzida de S_2 temos:

$$\|f(k + it)\|_{E_k} = \|T(\alpha - k - it)x\|_{E_k} \leq \|x\|_{E_\alpha} .$$

Finalmente, da condição 3, temos que $f(\alpha) = x$. Consequentemente,

$$(1) \qquad x \in [\mathbb{E}]_\alpha \quad \text{e} \quad \|x\|_{[\mathbb{E}]_\alpha} \leq \|x\|_{E_\alpha} \qquad (x \in M).$$

Provaremos agora a desigualdade inversa:

$$[\mathbb{E}]_\alpha \overset{1}{\subset} E_\alpha \qquad (x \in M).$$

Em virtude da Observação 2.6.2 e da prova da Observação 2.6.4, segue que para $x \in M$ nós podemos construir uma função $f \in H(\mathbb{E})$ com valores em M assim definida:

$$f(z) = \sum_1^N a_n(z)x_n \quad \text{tal que} \quad a_n \in H(\mathbb{C}), \quad x_n \in M, \quad f(\alpha) = x \quad \text{e}$$

$$(2) \qquad \|f\|_{H(\mathbb{E})} \leq \|x\|_{[\mathbb{E}]_\alpha} + \varepsilon .$$

Consideremos a função

$$h(z_1,z_2) = h(z) = T(z + iy)f(z), \quad \text{onde} \quad y = (y_1,y_2) \quad \text{fixo.}$$

Esta função é analítica em $\overset{o}{S}_2$, contínua e limitada em S_2 na norma de E_o. Ainda mais, de 2.12(2) temos:

$$\|h(k + is)\|_{E_o} \leq \sup_{t,s} \|T(k + it)f(k + is)\|_{E_o} \leq$$

$$\leq \sup_{s} \|f(k + is)\|_{E_k} \leq \|f\|_{H(\mathbb{E})} \qquad (k \in \square).$$

Pelo principio do módulo máximo para a faixa S_2 temos em virtude de (2) que

$$\|h(\alpha)\|_{E_o} = \|T(\alpha + iy)f(\alpha)\|_{E_o} = \|T(\alpha + iy)x\|_{E_o} \leq \|x\|_{[\mathbb{E}]_\alpha} + \varepsilon.$$

Finalmente, de 2.12(3) temos

$$\|x\|_{E_\alpha} = \sup_y \|T(\alpha + iy)x\|_M \leq \sup_y \|T(\alpha + iy)x\|_{E_o} \leq \|x\|_{[\mathbb{E}]_\alpha} + \varepsilon.$$

Da arbitrariedade de ε e usando (1) segue que

$$\|x\|_{E_\alpha} = \|x\|_{[\mathbb{E}]_\alpha} \qquad \text{para} \qquad x \in M.$$

Como, por construção, $(M, \|\cdot\|_\alpha)$ é denso em todos os espaços E_α e pelo Teorema 2.6.3 é denso também em $[\mathbb{E}]_\alpha$ então o teorema fica demonstrado.

Do Teorema 2.5. e do Teorema 2.10.3, nós obtemos o seguinte teorema

2.12.2. TEOREMA. Sejam E_α e F_β duas escalas analíticas conectando as famílias $\mathbb{E} = (E_k, k \in \square)$ e $\mathbb{F} = (F_k, k \in \square)$ respectivamente, tais que se $k > k'$ então E_k (F_k) está normalmente imerso em $E_{k'}$ $(F_{k'})$. Então a família $(E_\alpha, (0,0) \leq \alpha \leq (1,1))$ tem a propriedade de interpolação forte em relação à família $(F_\beta, (0,0) \leq \beta \leq (1,1))$, quando $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ são iterativas.

EXEMPLO. Seja M o conjunto das funções contínuas em $[0,1] \times \times [0,1]$ que se anulam numa vizinhança de zero (a vizinhança pode variar com a função). Consideraremos M com a norma de L^P, isto é, (ver [1]),

$$\|f\|_M = [\int_0^1 [\int_0^1 |f(t_1,t_2)|^{p_1} dt_1]^{p_2/p_1} dt_2]^{1/p_2} \qquad 1 \leq P = (p_1,p_2) < \infty.$$

Sobre este conjunto definimos uma família de operadores $T(z_1,z_2)$ por

$$T(z_1,z_2)f(t_1,t_2) = t_1^{-z_1} t_2^{-z_2} f(t_1,t_2).$$

As condições 1, 2, 3, e 4 do § 2.12 são imediatas. A condição 5, segue do fato que os operadores $T(iy_1,iy_2)$ são uniformemente limitados em norma.

Como já vimos, a função

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\tau \in \mathbb{R}^2} \|T(\alpha + i\tau)f\|_M, \quad f \in M, \quad \alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$$

é uma norma em M.

O completamento dos espaços $(M, \|\cdot\|_\alpha)$ será uma escala analítica que denotaremos por L_P^α, $-\infty < \alpha < \infty$, e

$$\|f\|_{L_P^\alpha} = [\int_0^1 [\int_0^1 |t_1^{-\alpha_1} t_2^{-\alpha_2} f(t)|^{p_1} dt_1]^{p_2/p_1} dt_2]^{1/p_2}.$$

Assim, pelo Teorema 2.12.1, segue que os espaços L_P^α, $0 \leq \alpha \leq 1$. podem ser obtidos pelo método complexo dos espaços L_P^k, $k \in \square$.

Ainda mais, se $\alpha \leq \beta$ então $\|f\|_{L_P^\alpha} \leq \|f\|_{L_P^\beta}$ e portanto pelo que vimos no § 2.12, esta escala é uma escala normal contínua em qualquer quadrado pivoteado por α_o e α_1. Assim as escalas analíticas $L^{\alpha}_{p_1}$ e $L^{\alpha}_{p_2}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ conectam, respectivamente, as famílias $\mathbb{E} = (L^{k}_{p_1}, k \in \square)$ e $\mathbb{F} = (L^{k}_{p_2}, k \in \square)$. Então, pelo Teorema 2.12.2, a família $(L^{\alpha}_{p_1}, 0 \leq \alpha \leq 1)$ tem a propriedade de interpolação forte em relação a família $(L^{\alpha}_{p_2}, 0 \leq \alpha \leq 1)$, ou seja todo operador limitado de $L^{0}_{p_1}$ em $L^{0}_{p_2}$ é um operador limitado de $L^{\alpha}_{p_1}$ em $L^{\alpha}_{p_2}$ e, ainda mais

$$\| T \|_{L^{\alpha}_{p_1} \to L^{\alpha}_{p_1}} \leq \prod_{k \in \square} [\| T \|_{L_{p_1^k} \to L_{p_2^k}}]^{\alpha(k)}$$

onde

$$\alpha(k) = \prod_{j=1}^{2} [(1 - k_j) + (-1)^{1-k_j} \alpha_j] .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BENEDEK - R. PANZONE, The L^p space with mixed norm. Duke Math. J., 28(1961), 301 - 324.

[2] J. I. BERTOLO, Sobre o método complexo de interpolação para 2^n espaços de Banach. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, (1982).

[3] J. I. BERTOLO - D. L. FERNANDEZ, On the conection between the real and complex interpolation method for several Banach spaces. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 66(1982), 193-209.

[4] A. P. CALDERÓN, Intermediate spaces and interpolation. Studia Math. Special Séries, 1(1963), 31 - 34.

[5] A. P. CALDERÓN, Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Studia Math. 24(1964), 113 - 190.

[6] G. DORE - D. GUIDETTI - A. VENNI, Complex interpolation for 2^n Banach spaces - Dipartimento di Matemática, Piazza di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna, Itália.

[7] N. DUNFORD - J. T. SCHWARTZ, Linear operators, part I, New York, Interscience (1964).

[8] R. E. EDWARDS, Functional analysis. Holt, Rinehart and Winston, New York (1965).

[9] A. FAVINI, Su una extensione del método d'interpolazione complesso. Rend. Math. Univ. Padova, 47(1972), 244 - 298.

[10] D. L. FERNANDEZ, Sobre a teoria e aplicações dos espaços de interpolação entre 2^n espaços de Banach. Tese de Livre Docência. IME - USP (1980).

[11] D. L. FERNANDEZ, On the interpolation of 2^n Banach spaces. Bull. Inst. Polyth. Iasi, 24(1980).

[12] D. L. FERNANDEZ, An extension of complex method of interpolation. Boll. Unione Mat. Italiana (5), 18-B (1981), 391 - 412.

[13] D. L. FERNANDEZ, On the duality of interpolation spaces of several Banach spaces. Acta Sci. Math., 44(1982), 43 - 51.

[14] D. L. FERNANDEZ, Interpolation of Sobolev-Nikol'skii spaces 18º Seminário Brasileiro de Análise. Rio de Janeiro - Out/83.

[15] D. L. FERNANDEZ, Interpolation on 2^n-tuples of Banach spaces. Studia Math., 65(1979), 87 - 113.

[16] E. GAGLIARDO, Interpolation d'espaces de Banach et applications. C.R. acad. Sci. Paris, 248(1959), 1912-1914.

[17] E. HILLE - R. S. PHILLIPS, Functional analysis and semi-groups. Am. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. XXXI.

[18] S. G. KREIN, On the concept of a normal scale. Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R., 132(1960), 510 - 513.

[19] S. G. KREIN - JU. I. PETUNIN, Scales of Banach spaces. Russian Math. Surveys, 21(1966), 85 - 158.

[20] S. G. KREIN - JU. I. PETUNIN - E. M. SEMENOV, Interpolation of linear operators. Translations of Mathematical Monographs, A.M.S., Vol. 54 (1982).

[21] J. L. LIONS, Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys.

R.P. Romaine, 50(1958), 419 - 432.

[22] J. L. LIONS, Theoremes de trace et d'interpolation. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 13(1960), 389-403; 14(1960), 317 - 331.

[23] J. L. LIONS, Une construction d'espaces d'interpolation. C.R. Acad. Sci. Paris, 251(1960), 1853 - 1855.

[24] J. L. LIONS - J. PEETRE, Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publ. Math. de l'Ihes, 19(1964), 5 - 68.

[25] P. I. LIZORKIN - S. M. NIKOL'SKII, A classification of differentiable functions in some fundamental space with mixed derivatives. Proc. Steklov Inst. Math., 77(1967), 160 - 187.

[26] J. PEETRE, A theory of interpolation of normed spaces. Lecture notes, Brasilia (1963).

[27] W. RUDIN, Real and complex analysis. McGraw Hill, London (1970).

[28] W. RUDIN, Function theory in polydiscs. W. A. Benjamin, Inc. (1969).

[29] S. SAKS - A. ZYGMUND, Fonctions analytiques. Paris, Masson (1970).

[30] M. SEBASTIANI, Funções analiticas de vārias variáveis complexas. 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, (1979).

[31] G. SPARR, Interpolation of several Banach spaces. Ann. Mat. Pura Appl. (IV) 99(1974), 247 - 316.

[32] A. E. TAYLOR, Introduction to functional analysis. N. York (1958).

[33] A. YOSHIKAWA, Sur la thēorie d'espaces d'interpolation, les espaces de moyenne de plusieurs espaces de Banach. J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, 16(1970), 407 - 468.

[34] A. ZYGMUND, Trigonometric sēries. Cambridge Univ. Press, (1959).